

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

TROIS ESSAIS EN ÉCONOMÉTRIE

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN ÉCONOMIQUE

PAR  
JÉRÉMY CHAUDOURNE

AVRIL 2014

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse : M. Alain Guay et M. Steve Ambler, pour leur grande disponibilité, leur générosité et leur aide précieuse. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance et de mon profond respect.

Je remercie Pierre Chaussé pour son aide lorsque j'en avais le plus besoin ainsi que Julien Champagne pour son éternel optimisme.

Merci à l'Université du Québec à Montréal et au Centre interuniversitaire sur le risque, les politiques économiques et l'emploi (CIRPEE) pour leur contribution au financement de mes études doctorales.

Mes chaleureux remerciements à Josée Parenteau, au personnel administratif du Département des sciences économiques, et plus particulièrement à Martine Boiselle, Francine Germain, Jacinthe Lalonde et Lorraine Brisson.

Je n'oublie pas non plus ma famille : ma mère Claire, ma sœur Raphaëlle, pour m'avoir encouragé à poursuivre mes études, pour leur patience, leur soutien et leur aide tout au long de la réalisation de cette thèse. Qu'elles trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Merci aussi à Lisa et Valérie, pour leur soutien et leurs encouragements dans les moments difficiles, et pour m'avoir rappelé les points importants de la vie lorsque cela était nécessaire.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	vi
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	vii
RÉSUMÉ . . . . .	viii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
COMPRENDRE LES EFFETS DES CHOCS TECHNOLOGIQUES DANS LES SVARS	
AVEC DES RESTRICTIONS DE LONG TERME . . . . .	4
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Analyse avec les données U.S. . . . .	9
1.3 Le cadre statistique et le modèle économique . . . . .	12
1.3.1 SVARs avec un processus persistant stationnaire . . . . .	12
1.3.2 Modèles de cycle réel (RBC) . . . . .	16
1.4 Estimation et inférence . . . . .	20
1.4.1 Le modèle LSVAR . . . . .	21
1.4.2 Le modèle DSVAR . . . . .	26
1.5 Simulation à partir d'un modèle DSGE avec frictions réelles . . . . .	31
1.6 Conclusion . . . . .	36
APPENDICE A	
FIGURES ET TABLEAUX . . . . .	38
APPENDICE B	
SOLUTION LOG-LINÉAIRE DU MODÈLE . . . . .	47
APPENDICE C	
PREUVES . . . . .	50
C.1 Preuve du théorème 1 . . . . .	50
C.2 Preuve de la proposition 1 . . . . .	54
CHAPITRE II	
COMPARAISON DE MODÈLES CALIBRÉS MAL SPÉCIFIÉS : UNE APPROCHE	
PAR L'INFÉRENCE INDIRECTE . . . . .	55



2.1	Introduction . . . . .	55
2.2	Inférence indirecte dans un cadre semi-paramétrique . . . . .	59
2.3	Estimation indirecte semi-paramétrique . . . . .	62
2.3.1	Convergence de l'estimateur semi-paramétrique d'inférence indirecte . . . . .	62
2.3.2	Une condition suffisante d'englobement pour la convergence . . . . .	63
2.4	Modèle structurel mal spécifié et inférence indirecte . . . . .	64
2.4.1	Distribution asymptotique de l'estimateur semi-paramétrique d'inférence indirecte . . . . .	64
2.5	Inférence indirecte séquentielle . . . . .	66
2.6	Comparaison de modèle . . . . .	67
2.7	Application . . . . .	69
2.7.1	Modèle de Burnside et Eichenbaum (1996) . . . . .	69
2.7.2	Modèle Ambler, Guay et Phaneuf (2012) . . . . .	71
2.7.3	Estimations des modèles et comparaisons des résultats . . . . .	74
2.8	Conclusion . . . . .	75
APPENDICE A		
	PREUVES . . . . .	76
A.1	Preuve proposition 5 . . . . .	76
A.2	Preuve exemple empirique . . . . .	79
CHAPITRE III		
	LA GRANDE MODÉRATION : CHANCE OU AMÉLIORATION DE LA POLITIQUE MONÉTAIRE . . . . .	84
3.1	Introduction . . . . .	84
3.2	Le modèle . . . . .	87
3.2.1	Le cadre économique . . . . .	87
3.2.2	Fonction de perte . . . . .	90
3.3	Politique optimale sous engagement . . . . .	90
3.3.1	Équilibre du modèle . . . . .	91
3.3.2	Politique monétaire optimale et impact des chocs . . . . .	92
3.3.3	Échantillons et données utilisés . . . . .	92

3.3.4	Procédure d'estimation et de construction de la courbe de Taylor . . . . .	93
3.3.5	Construction de la courbe de Taylor et analyse des sources des changements de performance . . . . .	98
3.4	Principaux résultats et analyses . . . . .	101
3.4.1	Paramètres estimés du modèle . . . . .	101
3.4.2	Analyse de l'efficience de la politique monétaire optimale . . . . .	105
3.4.3	Analyse de l'efficacité de la politique monétaire optimale . . . . .	108
3.4.4	Règle optimale de politique monétaire . . . . .	109
3.4.5	Dynamique des variables macroéconomiques : inflation, production et taux d'intérêt nominal . . . . .	112
3.5	Conclusion . . . . .	114
APPENDICE A		
SOLUTION DU MODÈLE . . . . .		116
APPENDICE B		
SOURCES ET DESCRIPTION DES DONNÉES . . . . .		119
APPENDICE C		
TABLEAUX . . . . .		121
APPENDICE D		
FIGURES . . . . .		124
CONCLUSION . . . . .		127

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
A.1 Données U.S. . . . .	39
A.2 IRFs des heures travaillées suite à une amélioration de la technologie . . . . .	40
A.3 IRFs des mesures de productivité suite à une amélioration technologique . . . . .	41
A.4 IRF des heures . . . . .	42
A.5 ACFs . . . . .	42
A.6 IRFs des mesures de technologie suite à une amélioration technologique . . . . .	43
A.7 IRFs des heures : Comparaisons des SVARs . . . . .	44
A.8 IRF de la productivité . . . . .	45
A.9 IRF des mesures de productivité : comparaison des SVARs . . . . .	46
3.1 Points de performances et frontières d'efficience de la politique monétaire pour les trois sous-périodes . . . . .	106
3.2 Mesures de glissement des points de performance et des frontières d'efficience	110
D.1 Fonctions de réponse relatives aux différents chocs (1966T1-1979T3) . . . . .	125
D.2 Fonctions de réponse relatives aux différents chocs (1982T4-2007T2) . . . . .	126

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
A.1 Effet de long terme d'une amélioration technologique sur les mesures de productivité (en %) . . . . .	38
A.2 Valeur des paramètre de $\Psi$ . . . . .	39
A.1 Résultats de l'estimation GMM des paramètres . . . . .	83
3.1 Valeurs estimées des paramètres du modèle . . . . .	102
3.2 Mesures de glissement des points de performance et des frontières d'efficience	107
3.3 Règles optimales de politique monétaire vs taux de préférence de la banque centrale ( $R_t = \vartheta_\pi \pi_{t-1} + \vartheta_x x_{t-1} + \gamma_1 \epsilon_t^x + \gamma_2 \epsilon_t^\pi$ ) . . . . .	111
3.4 Fonction de réponses relatives à un choc structurel . . . . .	113
C.1 Définition des paramètres du modèle linéaire . . . . .	121
C.2 Distribution à priori des paramètres du modèle . . . . .	122
C.3 Variabilités optimales et réalisées de l'inflation et de la production par sous-période . . . . .	123

## RÉSUMÉ

Cette thèse se compose de trois articles portant sur l'estimation des modèles dynamiques stochastiques d'équilibre général (DSGE). Le premier analyse les propriétés statistiques des fonctions de réponses dans les vecteurs autorégressifs structurels avec une variable hautement persistante (par exemple, les heures travaillées). Le deuxième développe un test pour comparer deux modèles DSGE. Quant au troisième, il porte sur l'évaluation de l'impact de la politique monétaire sur la période dite de la grande modération.

Dans le premier article, on étudie les propriétés statistiques des fonctions de réponses dans les vecteurs autorégressifs structurels (SVARs) avec une variable hautement persistante, telle que les heures travaillées, et des restrictions de long terme. La variable hautement persistante est spécifiée comme un processus presque stationnaire. Ce type de processus semble particulièrement utile pour caractériser la dynamique des heures travaillées, puisqu'il implique une racine unitaire en échantillon fini, mais est stationnaire et persistant de façon asymptotique. C'est habituellement le cas pour les heures travaillées per capita lesquelles sont incluses dans les SVARs. Les résultats théoriques dérivés de cette spécification nous permettent d'expliquer la plupart des faits empiriques obtenus avec les SVARs qui incluent les heures travaillées U.S. Des simulations faites à partir d'un modèle DSGE confirment les résultats théoriques.

Dans le deuxième article, on développe un test pour comparer les modèles DSGE. Ce test élargit celui développé par Hnatkovska, Marmer et Tang (2012), en relâchant certaines hypothèses. Premièrement on utilise la méthode d'inférence indirecte, ce qui nous permet de ne pas avoir à faire d'hypothèse sur la convergence des estimateurs. En effet celle-ci est assurée de par notre condition d'englobement. Deuxièmement, notre méthode permet aussi l'utilisation de vecteur de paramètres instrumentaux différents pour chacun des modèles. Le principal résultat obtenu est que la distribution asymptotique du test est normale, que les modèles soient imbriqués ou non. On finit par appliquer notre test afin d'évaluer les modèles de Burnside et Eichenbaum (1996) et de Ambler, Guay et Phaneuf (2012), dans leur capacités à reproduire la dynamique des cycles réels aux États-Unis. On conclut que le modèle de Ambler, Guay et Phaneuf (2012) prend mieux en compte cette dynamique de par l'introduction des rigidités salariales et les coûts d'ajustement du travail.

Dans le dernière article on utilise la courbe de Taylor dans le but d'analyser l'impact de la politique monétaire sur la stabilisation économique. Pour cela on utilise des techniques bayésienne pour estimer une version linéarisée du modèle DSGE standard utilisé par Castelnovo (2006). Afin d'évaluer le changement dans la performance macroéconomique qui est due au changement dans la variabilité des chocs et celle qui est due au changement dans l'efficacité de la politique, on s'appuie sur la méthodologie développée par Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006). Pour cela on construit trois mesures, une pour la performance macroécono-

mique, une pour les changements dans l'efficience de la politique et une pour les changements dans la variabilité des chocs d'offre. Le point clef de notre étude est le fait que l'on utilise la méthodologie bootstrap afin de prendre en compte l'incertitude entourant la courbe de Taylor, ainsi que celle des points de performances. Les principaux résultats sont que lorsque la performance de la politique monétaire se déplace vers l'origine, on observe une amélioration de l'efficacité de la politique monétaire, ce qui se traduit par une diminution des pertes sociales. De plus, nos résultats montrent que la performance macroéconomique s'est améliorée, et que cette amélioration est due en grande partie (environ 62%) à l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire.

**Mots clés : SVARs, heures travaillées, estimation modèle, Grande Modération.**

## INTRODUCTION

Aujourd'hui les modèles dynamiques stochastiques d'équilibre général (DSGE) sont l'outil de base de la nouvelle macroéconomie, avec pour ambition de fournir des microfondements structurels à la macroéconomie. Ainsi, cette thèse se compose de trois articles portant sur l'estimation des modèles DSGE. En effet, le premier article on étudie les propriétés statistiques des fonctions de réponses dans les vecteurs autorégressifs structurels (SVARs) avec une variable hautement persistante (par exemple, les heures travaillées). Dans le deuxième, on développe un test pour comparer deux modèles DSGE. Enfin, dans le dernier article on utilise l'estimation Bayésienne pour estimer un modèle DSGE, dans le but d'évaluer l'impact de la politique monétaire sur la grande modération.

Le première article a pour but d'expliquer le résultat controversé de la dynamique des heures travaillées suite à un choc technologique permanent identifié à partir des SVARs. Pour cela on développe un cadre statistique simple, mais qui a la force de pouvoir englober tous les résultats de la littérature comme des cas particuliers. Notre résultat clef est que les mouvements de basse fréquence dans les heures peuvent contaminer l'identification du choc technologique lorsque la productivité du travail est incluse dans les SVARs.

Pour cela on utilise différentes mesures de productivité, pour lesquelles on calcule la réponse dynamique des heures travaillées après une amélioration technologique. Les résultats principaux sont les suivants. Premièrement, lorsque l'on inclut dans les SVARs la mesure «purifiée» du facteur de productivité total (TFP), la spécification des heures n'a pas d'importance puisque nous obtenons presque la même réponse dynamique : les heures décroissent à court terme et présentent un comportement en cloche. Deuxièmement, lorsque la productivité du travail est utilisée, la réponse dynamique des heures avec le modèle LSVAR (les heures sont spécifiées en niveau) est positive, mais elle devient négative de façon persistante avec le modèle DSVAR (les heures sont spécifiées en première différence) et les deux diffèrent de celle obte-

nue avec la mesure «purifiée» du facteur de productivité total. Troisièmement, les intervalles de confiance avec le modèle LSVAR sont assez grands et ne sont donc pas informatifs.

Dans le deuxième article on construit une procédure en deux étapes pour des modèles mal spécifiés à l'aide d'un test asymptotique. Dans ce test, sous l'hypothèse nulle les deux modèles sont mal spécifiés et fournissent une approximation équivalente pour les données. Notre approche est principalement reliée aux travaux de Vuong (1989); Rivers et Vuong (2002); Hnatkovska, Marmer et Tang (2012). Cette méthode en deux étapes nous permet d'obtenir des estimateurs convergents vers des paramètres structurels, et donc cela permet que la deuxième étape (l'étape de discrimination) ne soit pas contaminée par une mauvaise estimation. En effet, cela permet d'estimer les paramètres de nos modèles sur des faits stylisés différents, et ensuite de les comparer sur le même ensemble de faits stylisés. De plus, comme le cadre est développé pour des méthodes d'estimations par simulation, cela nous permet de corriger le biais de petits échantillons lorsque l'on estime les coefficients des modèles vectoriels autorégressifs dans la deuxième étape. Il est aussi important de souligner que comme on utilise une méthode d'inférence indirecte, nous n'avons pas à faire l'hypothèse très forte faite par Hnatkovska, Marmer et Tang (2012), sur la convergence de leurs estimateurs. En effet, avec la méthode d'inférence indirecte et la condition d'englobement, on est assuré de la convergence de nos estimateurs.

Le principal résultat que l'on obtient est que la distribution asymptotique du test (obtenue à la deuxième étape) est normale, pour le cas où les modèles sont imbriqués ou non imbriqués. De plus l'utilisation du test pour comparer le modèle de Burnside et Eichenbaum (1996) (modèle à rétention de main d'oeuvre avec une utilisation variable du capital) et celui de Ambler, Guay et Phaneuf (2012) (modèle comportant des coûts d'ajustements du travail et des contrats de salaires échelonnés) nous permet de conclure que les frictions introduites dans le modèle de Ambler, Guay et Phaneuf (2012) permettent de prendre en compte la dynamique complète de la croissance de l'output et des heures travaillées.

Enfin dans le dernier article on s'intéresse aux causes de la forte diminution de la volatilité de l'output et de l'inflation depuis le milieu des années 1980, c'est-à-dire aux causes de la grande modération. En effet, pour expliquer cela, deux grands courants de pensées s'affrontent.



D'un côté cela serait dû à la baisse des chocs macroéconomiques aléatoires ou «good luck», et d'un autre côté cela serait dû à des changements structurels au niveau de l'économie ainsi que des politiques monétaires suivies et/ou adoptées définies comme «good policy». Pour éviter de sous-estimer le rôle joué par la politique monétaire (voir Benati et Surico (2008)) nous utilisons un modèle standard DSGE. Pour analyser l'impact de la politique monétaire sur cette stabilisation économique, nous utilisons la courbe de Taylor, qui définit la relation d'arbitrage entre la variabilité de l'inflation et de la production. Il est important de souligner que l'on utilise la méthodologie bootstrap, ce qui nous permet de prendre en compte l'incertitude entourant la courbe de Taylor, ainsi que celle des points de performance.

Ainsi le but de notre article est d'analyser les sources de cette stabilité économique durant les dernières décennies. On se base sur une version linéarisé du modèle DSGE standard utilisé par Castelnovo (2006). Pour analyser les différentes forces derrière ce changement, nous utilisons la méthodologie développée par Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006), qui permet de diviser le changement dans la performance macroéconomique en une partie qui est due au changement dans la variabilité des chocs et la partie qui peut être attribuée au changement dans l'efficacité de la politique. Pour cela on se base sur trois mesures, une pour la performance macroéconomique, une pour les changements dans l'efficacité de la politique et une pour les changements dans la variabilité des chocs d'offre.

Les principaux résultats sont les suivants. Premièrement l'arbitrage de la banque centrale s'est fortement amélioré durant la grande modération, ce qui se traduit par un déplacement de la courbe de Taylor vers l'origine. Deuxièmement, comme on utilise la méthodologie bootstrap, on peut montrer que la politique monétaire est devenue efficace durant la grande modération. Enfin la méthodologie nous permet de conclure que la performance macroéconomique s'est améliorée, et que cette amélioration est due en grande partie (62%) à l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire. Ces résultats confirment donc que la stabilité observée, est due en grande partie à l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire, et dans une moindre partie à la réduction des chocs.

## CHAPITRE I

### COMPRENDRE LES EFFETS DES CHOCES TECHNOLOGIQUES DANS LES SVARS AVEC DES RESTRICTIONS DE LONG TERME

#### 1.1 Introduction

La réponse dynamique des heures travaillées suite à un choc technologique permanent identifiée à partir des SVARs est un problème controversé. La spécification des heures dans les SVARs et la mesure de la productivité apparaissent cruciales dans l'explication de ces résultats conflictuels (voir e.g. Galí et Gertler (1999); Francis et Ramey (2005); Basu, Fernald et Kimball (2006); Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2004); Christiano, Eichenbaum et Evans (2005); Chari, Kehoe et McGrattan (2008) et Fève et Guay (2009)). Le but de l'article est d'expliquer ces résultats conflictuels dans les SVARs en utilisant un cadre statistique simple où les heures travaillées sont modélisées comme un processus localement non stationnaire. La force de notre papier est que bien que notre modèle statistique soit simple, il permet de reproduire parfaitement tous les résultats de la littérature, on peut donc le voir comme un modèle général englobant les résultats de la littérature comme des cas particuliers. Notre résultat clef est que les mouvements de basse fréquence dans les heures peuvent contaminer l'identification du choc technologique lorsque la productivité du travail est incluse dans les SVARs.

En utilisant différentes mesures de productivité, nous calculons la réponse dynamique des heures travaillées après une amélioration technologique. Les résultats principaux sont les suivants. Premièrement, lorsque l'on inclut dans les SVARs la mesure «purifiée» du facteur de

productivité totale des facteurs (TFP) construite par Basu, Fernald et Kimball (2006)<sup>1</sup> la spécification des heures n'a pas d'importance puisque nous obtenons presque la même réponse dynamique : les heures décroissent à court terme et présentent un comportement en cloche. Deuxièmement, lorsque la productivité du travail est utilisée, la réponse dynamique des heures avec le modèle LSVAR (les heures sont spécifiées en niveau) est positive, mais elle devient négative de façon persistante avec le modèle DSVAR (les heures sont spécifiées en première différence) et les deux diffèrent de celle obtenue avec la mesure «purifiée» du facteur de productivité total. Troisièmement, les intervalles de confiance avec le modèle LSVAR sont assez grands et ne sont donc pas informatifs.

Certains travaux existants ont proposé des explications de ces résultats conflictuels avec les modèles LSVAR et DSVAR. Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2004) et Gospodinov (2010) établissent que la grande incertitude échantillonnale avec le modèle LSVAR peut venir d'un problème d'instrument faible lorsque la plus grande racine est unitaire ou proche de la frontière de non stationnarité (stationnaire en petit échantillon mais asymptotiquement non stationnaire). Un modèle LSVAR pour de tels processus mène ainsi à un estimateur non convergent du choc technologique. En utilisant aussi un SVAR presque non stationnaire, Gospodinov, Maynard et Pesavento (2011) expliquent la différence dans les fonctions de réponses empiriques par des petits comouvements à basse fréquence entre les heures travaillées et la croissance de la productivité qui apparaissent dans la spécification LSVAR mais disparaissent dans la spécification DSVAR. Alors qu'un processus presque intégré (ou une racine unitaire) peut fournir une bonne approximation statistique en échantillon fini pour une variable hautement persistante, telle que les heures travaillées (voir Francis et Ramey (2005)), le nombre maximal d'heures qu'une personne peut travailler dans une journée est borné et par conséquent son processus stochastique ne peut avoir une racine unitaire de façon asymptotique.<sup>2</sup> Aucun modèle qui prenne en compte

---

1. Cette mesure «purifiée» est une mesure agrégée des changements technologiques qui prend en compte l'utilisation variable du capital et du travail, la compétition imparfaite et les rendements d'échelles non constant, et les effets d'agrégation.

2. Une représentation stochastique stationnaire ne permet pas d'éviter le fait que les heures excéderont n'importe quelle limite positive, mais le problème est encore plus important si il contient une racine unitaire.

cette contrainte physique ne peut aboutir à un processus à racine unitaire pour le logarithme des heures (voir Chari, Kehoe et McGrattan (2008), pour une discussion). Par conséquent, la non stationnarité asymptotique pour les heures ne peut être considérée comme une représentation adéquate. La caractérisation des heures travaillées comme un processus persistant localement non stationnaire mais asymptotiquement stationnaire semble plus compatible avec les résultats empiriques et les implications théoriques. Les modèles SVAR avec une variable persistante presque non stationnaire semblent offrir une représentation plus appropriée pour l'étude des propriétés des estimateurs du SVAR et de la réponse dynamique associée dans une représentation incluant une variable hautement persistante, telle que les heures travaillées. Le processus persistant, presque non stationnaire, est aussi plus proche des modèles de cycle réels, dans lesquels les heures travaillées sont stationnaires mais présentent une autocorrélation élevée (voir Erceg, Guerrieri et Gust (2005); Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2006); Chari, Kehoe et McGrattan (2008); Fève et Guay (2009)).<sup>3</sup>

La deuxième partie de l'article étudie les propriétés des estimateurs et des fonctions de réponses (IRF) suite à un choc permanent (i.e., un choc technologique), lorsque la variable non stationnaire (la mesure de la TFP ou productivité du travail) a exactement une racine unitaire de façon asymptotique et les autres variables (heures travaillées) suivent un processus persistant presque non stationnaire. Nous montrons que les réponses estimées à partir du modèle LSVAR sont biaisées en échantillon fini si la mesure de la productivité est contaminée par les mouvements de basses fréquences dans les heures. Cependant, si les économètres utilisent une bonne mesure de la TFP, le biais disparaît. Nous dérivons aussi la distribution asymptotique pour les paramètres structurels du modèle LSVAR. Les estimateurs sont asymptotiquement convergents, mais présentent une distribution limite non standard. Cela explique les grands intervalles de confiance pour les réponses dynamiques dans le cadre du LSVAR. Comme pour le modèle LSVAR, les réponses estimées obtenues du modèle DSVAR sont biaisées en échantillon fini si la mesure de productivité (i.e., la productivité du travail) inclut les mouvements de basse fré-

---

3. Chang, Doh et Schorfheide (2007), considèrent un modèle DSGE avec les heures non stationnaires et montrent que la spécification en niveau des heures doit être préférée à la spécification en différence lorsque le modèle inclut des frictions réelles sous la forme de coût d'ajustement du travail.



quences dans les heures. Ce biais vient du fait que les deux chocs ont un effet permanent sur la productivité du travail en échantillon fini, violant le schéma d'identification de long terme. C'est ce qui explique les grandes différences dans les IRF estimées entre les modèles LSVAR et DSVAR. Lorsque les économètres utilisent une mesure "purifiée" de la TFP au lieu de la productivité du travail, le DSVAR peut donner des estimateurs convergents. Dans ce cas, les restrictions de long terme sont valides, puisque les mouvements de basse fréquence dans les heures ne contaminent pas la mesure de productivité. Ce résultat explique les faits empiriques qui montrent que les modèles LSVAR et DSVAR donnent des réponses dynamiques des heures voisines lorsque la mesure "purifiée" de la TFP est incluse dans le modèle VAR. Notre cadre explique aussi pourquoi les réponses dynamiques du LSVAR et DSVAR avec une mesure "purifiée" diffèrent de celles identifiées avec le LSVAR et DSVAR utilisant la productivité du travail. Ces résultats théoriques révèlent que notre cadre statistique explique bien les trois faits empiriques discutés plus tôt à partir d'un SVAR avec des données U.S. Comme explication alternative, Gospodinov, Maynard et Pesavento (2011) proposent un cadre SVAR avec des comouvements à basses fréquences. Ces comouvements, qui sont présents dans la spécification en niveau, disparaissent dans le modèle DSVAR. Alors que ce cadre est utile pour expliquer pourquoi les modèles LSVAR et DSVAR produisent des résultats différents, ce cadre ne permet pas d'expliquer pourquoi la réponse dynamique estimée à partir du LSVAR et du DSVAR avec la productivité du travail est biaisée en petit échantillon comme le montrent les simulations (Chari, Kehoe et McGrattan (2008); Fève et Guay (2010)) et diffère de celle obtenue avec une mesure "purifiée" de la TFP.<sup>4</sup> Notre article complète aussi les leurs, en montrant que la variable qui a la racine unitaire doit contenir une petite portion du choc non technologique dans le but

---

4. Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2006) obtiennent une réponse dynamique avec un petit biais pour le LSVAR en utilisant la productivité du travail. A première vue, cela pourrait apparaître à l'encontre de nos explications. Cependant, ce résultat peut être expliqué par la petite portion de la variance de la productivité du travail générée par le choc non technologique grâce à la configuration de leur paramètre utilisé pour effectuer les simulations. En fait, pour les valeurs des paramètres utilisées par Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2006), la productivité du travail résultant est proche d'être une mesure adéquate de la TFP. Ceci tient aussi pour certains résultats de Fève et Guay (2010) (voir tableau 2, cas avec  $\rho_x = .99$ ) et  $\sigma_x/\sigma_\varepsilon = .5$ ) où les valeurs des paramètres sont proches de celles utilisées par Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2006).

d'obtenir des estimateurs précis des réponses dynamiques, comme souligné précédemment par Chari, Kehoe et McGrattan (2008); Fève et Guay (2010).

Nous effectuons aussi des simulations à partir d'un modèle DSGE estimé en échantillon fini qui illustrent et confirment nos résultats asymptotiques. En particulier les mouvements de basse fréquence dans les heures contribuent de façon importante aux fluctuations des heures. Ces mouvements contaminent ensuite la productivité du travail et altèrent le schéma d'identification. Inversement, lorsque l'économètre peut observer la vraie TFP, les modèles LSVAR et DSVAR estiment de façon convergente la vraie réponse des heures suite à un choc technologique. Comme vérification additionnelle de notre cadre d'analyse, on évalue la réponse dynamique de la mesure de productivité suite à un choc technologique. Nos simulations valident nos résultats théoriques et montrent que les réponses estimées surestiment la vraie lorsqu'une mesure contaminée des heures (et ensuite de la productivité du travail) est incluse dans les SVARs.

Nous effectuons aussi des simulations à partir d'un modèle DSGE estimé en échantillon fini qui illustre et supporte nos résultats asymptotiques. En particulier, nous obtenons que les mouvements de basse fréquence dans les heures contribuent de façon importantes aux fluctuations des heures. Ces mouvements contaminent ensuite la productivité du travail et altèrent le schéma d'identification. Inversement, lorsque l'économètre peut observer la vraie TFP, les modèles LSVAR et DSVAR estiment de façon convergente la vraie réponse des heures suite à un choc technologique. Comme vérification additionnelle de notre cadre d'analyse, on évalue la réponse dynamique de la mesure de productivité suite à un choc technologique. Nos simulations soutiennent nos résultats théoriques et montrent que les réponses estimées surestiment la vraie lorsqu'une mesure contaminée des heures (et ensuite de la productivité du travail) est inclus dans les SVARs.

L'article est organisé comme suit. Dans la première section, nous rapportons les estimés des réponses dynamiques avec les données U.S. Dans la section 2 nous présentons le cadre statistique et un modèle économique pour motiver la spécification adoptée des heures travaillées. La section 3 analyse le comportement en échantillon fini et asymptotique des SVARs avec un processus presque stationnaire. La section 4 présente des simulations faites à partir du modèle

DSGE. La dernière section conclut. Les preuves sont rapportées en appendice.

## 1.2 Analyse avec les données U.S.

Dans cette section, nous présentons quelques faits sur la réponse des heures à court termes dans différents SVARs estimés avec des données U.S. Les SVARs incluent trois mesures différentes de la productivité qui sont ensuite utilisées pour les restrictions de long terme. Dans chaque cas, ces variables sont supposées avoir une racine exactement unitaire.<sup>5</sup> Les variables de productivités considérées de façon successive sont les résidus de Solow, une mesure “purifiée” de la TFP et la productivité du travail. Toutes les mesures de productivité sont spécifiées en logarithme et en première différence. Les données sont tirées de Basu, Fernald et Kimball (2006). La fréquence des données est annuelle et couvre la période 1979-1996.<sup>6</sup> Notre mesure des heures travaillées est le log des heures travaillées du secteur non manufacturier, divisé par la population de 16 ans et plus. Les données utilisées dans cette analyse empirique sont représentées dans la figure A.1. Les trois mesures de la productivité présentent des comportements cycliques similaires, mais la mesure “purifiée” est moins volatile que les deux autres. De plus, le résidu de Solow et la croissance de la productivité du travail sont imparfaitement corrélés avec la mesure “purifiée” (les coefficients de corrélation entre les taux de croissance sont 0.31 et 0.57 respectivement). Comme le montre le côté droit de la figure A.1, le log des heures présente des fluctuations persistantes durant la période échantillonnale. Les fonctions d'autocorrélation estimées suggèrent que les heures travaillées présentent une autocorrélation élevée. Nous effectuons aussi un test de racine unitaire de Dickey Fuller augmenté (ADF). Nous régressons le taux de croissance des heures sur une constante, son niveau retardé, et deux retards de sa première différence. La statistique du test ADF est égale à -1.26 et l'hypothèse nulle de racine unitaire ne

---

5. Ceci est confirmé par les tests de racine unitaire sur chacune des mesures de productivité. La racine unitaire sur le niveau de chaque mesure n'est pas rejetée, alors que la racine unitaire sur la première différence est rejetée au niveau de confiance habituelle.

6. Fernald (2012) propose une version trimestrielle de ses mesures de technologie. Nous n'utilisons pas ces nouvelles données, puisqu'elles ne prennent pas en compte des caractéristiques importantes (markups variant dans le temps et hétérogénéité) qui sont présentes dans les données annuelles de Basu, Fernald et Kimball (2006).

peut être rejetée à 5%. Ceci suggère que les heures sont non stationnaires et qu'elles doivent par conséquent être spécifiées en première différence dans les SVARs. Cependant, il est bien connu que les tests de racine unitaire ont une faible puissance en petit échantillon contre l'alternative de stationnarité, et donc les heures sont spécifiées en niveau ou en première différence dans les SVARs.

Les quatre SVARs (avec les heures en niveau et en première différence) utilisent des mesures directes de la TFP et correspondent à celles adoptées par Basu, Fernald et Kimball (2006); Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2004). Le modèle SVAR avec la croissance de la productivité et le log des heures en niveau est celui adopté par Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2003), alors que le SVAR avec le log des heures en niveau est celui adopté par Galí et Gertler (1999); Galí et Rabanal (2004); Francis et Ramey (2005). Dans tous les cas, on considère un modèle VAR bivarié et l'on impose des restrictions de long terme à la Blanchard et Quah (1989) qui impliquent que le choc technologique est la seule variable qui peut avoir un effet permanent sur le résidu de Solow, la mesure "purifiée" de la TFP et la productivité du travail. Suivant Basu, Fernald et Kimball (2006); Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2003), le nombre de retards pour chaque VAR est deux. Les résultats trouvés sont robustes à d'autres choix du nombre de retards. L'intervalle de confiance est obtenu à partir de la technique de bootstrap avec 1000 répliques. Les résultats sont présentés dans les figures A.2 et A.3. A des fins de comparaison, on prend la même échelle pour chaque fonction de réponse estimée. On considère deux ensembles de réponses dynamiques. Premièrement, on se concentre sur la réponse dynamique des heures après une amélioration de la technologie. Deuxièmement, on analyse la réponse des trois mesures de productivité suite à un choc technologique.

Considérons premièrement la réponse dynamique des heures, puisqu'elle constitue le problème central (voir figure A.2). Lorsque le résidu de Solow et la mesure "purifiée" de la TFP sont inclus dans le modèle SVAR, la spécification des heures (en niveau ou en première différence) n'a pas d'importance. A l'impact, les heures décroissent, mais après deux ans la réponse devient positive de façon persistante et présente un comportement en cloche.<sup>7</sup> Il est intéressant

---

7. Voir Vigfusson (2004), pour des faits empiriques similaires.



de noter que l'écart entre les IRFs (entre la spécification en niveau et en première différence) est moins prononcé lorsque la mesure "purifiée" de la TFP est considérée à la place du résidu de Solow. Ce résultat signifie que lorsqu'une bonne mesure de la productivité est disponible, des estimateurs convergent de la réponse dynamique des heures travaillées peuvent être obtenus peu importe la spécification des heures. Lorsque le taux de croissance de la productivité est inclus dans le modèle SVAR, les choses changent de façon dramatique. En effet, les modèles LSVAR et DSVAR donnent des conclusions opposées sur la réponse dynamique des heures et pour les deux spécifications la réponse dynamique diffère de celle obtenue par la mesure "purifiée" de la TFP. À l'exception de l'impact, le modèle LSVAR présente une réponse positive en forme de cloche alors que le modèle DSVAR implique une diminution persistante des heures (voir Galí et Gertler (1999); Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2004); Francis et Ramey (2005)). Finalement, dans le cas de la spécification des heures en niveau, l'intervalle de confiance est alors si grand que les IRFs estimés des heures ne sont pas significativement différents de zéro pour tous les horizons. C'est plus spécialement vrai lorsque la croissance de la productivité est incluse dans le modèle LSVAR. On obtient aussi un intervalle de confiance assez grand avec des mesures directes de productivité. Lorsque les heures sont spécifiées en première différence, l'intervalle de confiance reste assez large mais la réponse dynamique apparaît être estimée de façon plus précise, spécialement dans le très court terme.<sup>8</sup>

Considérons maintenant les réponses dynamiques estimées de chaque mesure de productivité des améliorations technologiques. Les fonctions de réponses sont présentées dans la figure A.3. Les réponses sont comparables pour les trois mesures de productivité, puisque chacune d'elle s'ajustera de façon permanente à long terme après un choc technologique permanent. La mesure "purifiée" de la TFP change presque immédiatement tandis que le résidu de Solow change après une période. Notons que la spécification des heures n'a pas d'importance, puisque

---

8. On peut aussi compléter cette description en calculant la corrélation des innovations technologique identifiées à partir des modèles LSVAR et DSVAR, pour chaque mesure de productivité. La corrélation la plus élevée est obtenue dans le cas de la mesure "purifiée" de la TFP, 0.9860, et la plus basse est obtenue lorsque la productivité est incluse dans les SVARs, 0.9082. Le résidu de Solow donne des résultats intermédiaires avec une corrélation de 0.9831.

la réponse dynamique avec ces deux mesures est très similaire. Ce résultat contraste avec ceux obtenus avec la productivité du travail. Les modèles LSVAR et DSVAR présentent différentes réponses à court terme. Le modèle DSVAR implique un ajustement rapide de la productivité du travail vers sa nouvelle valeur de long terme. Avec le modèle LSVAR, la productivité s'ajuste de façon graduelle et persistante. L'effet de long terme de la mesure de technologie peut être directement obtenu à partir d'une décomposition de Choleski de la matrice de covariance de long terme des variables. Les résultats sont présentés dans le tableau A.1. Pour chaque mesure, l'effet de long terme est assez similaire quelle que soit la spécification des heures.<sup>9</sup> Notons cependant, que la différence est plus prononcée dans le cas de la productivité du travail. Encore une fois, la mesure "purifiée" implique la plus petite différence et le résidu de Solow un résultat intermédiaire. Un autre aspect important est la grande différence entre la mesure "purifiée" et la productivité du travail. Par exemple, avec la spécification DSVAR, l'effet de long terme est 1.39% avec la mesure "purifiée" et 2.32% avec la productivité du travail. En utilisant cette dernière variable on obtient des effets de long terme suite à une amélioration de la technologie.

### 1.3 Le cadre statistique et le modèle économique

Nous présentons premièrement une spécification du processus persistant stationnaire. Deuxièmement, nous relierons ceci à la représentation dynamique des heures travaillées obtenues à partir d'un modèle RBC standard.

#### 1.3.1 SVARs avec un processus persistant stationnaire

Dans cette section nous présentons notre spécification du processus hautement persistant. Ceci est obtenu en le paramétrant comme un processus persistant stationnaire. Phillips (1987); Chan et Wei (1987), parmi d'autres, considèrent un processus presque racine unitaire pour analyser la puissance asymptotique des tests de racine unitaire sous une séquence d'alternatives locales. Puisque l'on s'intéresse à un processus hautement persistant qui est asymptotiquement

---

9. Le modèle DSVAR donne des réponses de long terme plus grandes que le modèle LSVAR avec chaque mesure de productivité.

stationnaire, nous considérons des alternatives locales dont le processus est localement non stationnaire mais asymptotiquement stationnaire et persistant.

Introduisons premièrement une paramétrisation du processus persistant presque stationnaire avec un exemple simple. À des fins d'exposition, supposons le processus univarié suivant

$$(1 - \rho L)\Delta x_t = u_t - \delta_T u_{t-1}$$

$$\delta_T = \left(1 - c/\sqrt{T}\right),$$

avec  $0 < \rho < 1$ ,  $c > 0$  et  $u_t$  est un bruit blanc. Lorsque  $T$  augmente vers l'infini et pour de grandes valeurs de  $\rho$  (i.e 0.97 et plus), ce processus devient un processus persistant stationnaire, alors que, en échantillon fini, le processus est caractérisé par une racine unitaire. Ce processus est localement non stationnaire mais asymptotiquement stationnaire et persistant. Cette caractérisation du processus hautement persistant a deux avantages. Premièrement, elle représente bien le comportement de la série temporelle des variables pour lesquelles les tests de racines unitaire ne peuvent rejeter la non stationnarité en petit échantillon. Deuxièmement, bien que hautement persistante, la variable est nécessairement caractérisée par un processus asymptotiquement stationnaire. Pantula (1991); Perron et Ng (1996); Ng et Perron (2001) considèrent une version simplifiée de ce processus avec  $\rho = 0$  mais pour analyser la performance des tests de racine unitaire.<sup>10</sup> Il est important de comprendre que la spécification adoptée ici ne doit pas être interprétée comme la description littérale des données mais comme un outil pour approximer le comportement d'une variable hautement persistante en petit échantillon qui est nécessairement stationnaire de façon asymptotique.

De manière générale, nous sommes intéressés par une représentation bivariée  $X_t = (\Delta X_{1t}, X_{2t})$  pour  $t = 1, \dots, T$ , où la variable  $X_{1t}$  contient une racine exactement unitaire et  $X_{2t}$  est une variable hautement persistante. Les deux variables dans le vecteur  $X_t$  sont asymptotiquement stationnaires du second ordre et elles admettent la décomposition de Wold suivante

---

10. Bien sûr, la paramétrisation adoptée par ces auteurs n'est pas applicable dans notre cas puisqu'un tel processus est un bruit blanc de façon asymptotique.

de façon asymptotique

$$X_t = C(L)\epsilon_t, \quad (1.1)$$

où  $C(L) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \epsilon_{t-j}$  et  $C_0 = I_2$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} C_j^2 < \infty$ .  $\epsilon_t$  est un vecteur de processus bruit blanc avec  $E(\epsilon_t) = 0$  et  $E(\epsilon_t \epsilon_t') = \Sigma$ . La partie déterministe est omise pour simplifier la représentation sans altérer les résultats. Considérons maintenant une représentation moyenne mobile structurelle (SMA) pour  $X_t$

$$X_t = A(L)\eta_t, \quad (1.2)$$

où  $A(L) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j$  et  $\eta_t = (\eta_{1t}, \eta_{2t})'$  est le vecteur de choc structurel avec  $E(\eta_t \eta_t') = \Omega$  est une matrice diagonale. Une hypothèse d'identification commune est  $\Omega = I_2$ , la variance des chocs structurels est alors normalisée à 1.

Étant donné la représentation (1.1) et (1.2), les termes d'erreur  $\epsilon_t$  de la forme réduite sont reliés aux termes d'erreurs structurelles  $\eta_t$  comme suit :  $\epsilon_t = A_0 \eta_t$  ce qui implique que  $\Sigma = A_0 A_0'$ . La représentation SMA est identifiée à partir de l'identification de la matrice  $A_0$ . Nous nous concentrons ici sur la stratégie d'identification basée sur les restrictions de long terme telles que proposées par Blanchard et Quah (1989). Le schéma d'identification utilise la matrice de covariance de long terme de la forme réduite (1.1) et de la forme structurelle (1.2) lesquelles sont reliées par  $C(1)\Sigma C(1)' = A(1)A(1)'$  et  $A_0 = C(1)^{-1}A(1)$ . Habituellement une structure diagonale par le bas est imposée pour la matrice d'impact de long terme  $A(1)$  laquelle peut facilement être obtenue en utilisant une décomposition de Choleski de la matrice de covariance de long terme  $C(1)\Sigma C(1)'$ . Dans le cas où deux variables sont incluses dans  $X_t$ , la premier choc structurel est le seul choc qui peut avoir un effet permanent sur la première variable.

Considérons maintenant pour un échantillon fini de  $T$  observations une caractérisation structurelle de la variable hautement persistante  $X_{2t}$  comme un processus persistant presque stationnaire :

$$\begin{aligned} \Delta X_{2t} &= a_{21}(L)\Delta\eta_{1t} + a_{22}(L) \left( 1 - \left( 1 - \frac{c}{\sqrt{T}} \right) L \right) \eta_{2t} \\ &= a_{21}(L)\Delta\eta_{1t} + \bar{a}_{22,T}(L)\eta_{2t}, \end{aligned}$$

où  $\bar{a}_{22,T}(L) = \left(1 - \left(1 - \frac{c}{\sqrt{T}}L\right)\right)$ . Par la décomposition de Beveridge-Nelson, on peut ré-écrire cela comme

$$\Delta X_{2t} = a_{21}(L)\Delta\eta_{1t} + \bar{a}_{22,T}(1)\eta_{2t} + \bar{a}_{22,T}^*(L)\Delta\eta_{2t},$$

avec  $\bar{a}_{22,T}(1) = a_{22}(1)\frac{c}{\sqrt{T}}$  et  $\bar{a}_{22,T}^*(L)(1-L) = \bar{a}_{22,T}(L) - \bar{a}_{22,T}(1)$ . Examinons plus en détail cette spécification. La représentation SMA bivariée contient un processus stationnaire en différence  $\Delta X_{1t}$  et un processus hautement persistant tel que

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{1t} \\ \Delta X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(L) & a_{12}(L)(1-L) \\ a_{21}(L)(1-L) & \bar{a}_{22,T}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1t} \\ \eta_{2t} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

et seul  $\eta_{1t}$  a un effet permanent sur la première variable. La deuxième variable  $X_{2t}$  est asymptotiquement stationnaire mais localement non stationnaire pour des valeurs de  $c$  plus grandes que zéro.<sup>11</sup> La valeur de  $c$  contrôle l'amplitude de la non stationnarité locale. De plus, pour des valeurs appropriées de  $a_{21}(L)$  et  $a_{22}(L)$ , le processus est asymptotiquement persistant mais stationnaire. Nous considérons aussi le cas où le second choc peut avoir un effet permanent localement sur la première variable  $X_{1t}$ . Nous montrons en dessous que cela peut arriver lorsque la première variable est une combinaison linéaire de la variable persistante  $X_{2t}$ . Pour un  $T$  fixe, la caractérisation correspondante de la première variable est

$$\begin{aligned} \Delta X_{1t} &= a_{11}(L)\eta_{1t} + a_{12}(L) \left(1 - \left(1 - \frac{c}{\sqrt{T}}\right)L\right) \eta_{2t} \\ &= a_{11}(L)\eta_{1t} + \bar{a}_{12,T}(L)\eta_{2t}, \end{aligned}$$

où  $\bar{a}_{12,T}(L) = a_{12}(L) \left(1 - \left(1 - \frac{c}{\sqrt{T}}\right)L\right)$  et  $c$  est le même que dans la spécification de la variable  $X_{2t}$ . Ici, le schéma d'identification basé sur la restriction de long terme que seul le premier choc a un effet permanent est encore valide de façon asymptotique mais ne tient pas pour un  $T$  fini. La représentation SMA résultante est

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{1t} \\ \Delta X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(L) & \bar{a}_{12,T}(L) \\ a_{21}(L)(1-L) & \bar{a}_{22,T}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1t} & \eta_{2t} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

---

11. Les cas où  $c$  est plus petit que zéro ne sont pas permis pour exclure les représentations non fondamentales de  $\Delta X_{2t}$  en échantillon fini.



Un modèle RBC permettant d'illustrer la représentation SMA proposée (1.3) et (1.4) est présenté en dessous.

### 1.3.2 Modèles de cycle réel (RBC)

Les représentation SMA (1.3) et (1.4) incluent plusieurs modèles de cycle réel où la TFP contient une racine unitaire exacte. Pour voir cela, nous considérons le modèle dynamique simple suivant. La fonction d'utilité intertemporelle espérée du ménage représentatif est donnée par

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \{ \log(C_{t+i}) + B(1 - H_{t+i}) \},$$

où  $B$  est un paramètre d'échelle positif,  $\beta \in (0, 1)$  représente le facteur d'escompte et  $E_t$  est l'opérateur d'espérance conditionnelle sur l'information disponible au temps  $t$ .  $C_t$  est la consommation au temps  $t$  et  $H_t$  représente l'offre de travail du ménage. La dotation en temps est normalisée à l'unitaire. Pour faciliter les calculs de la solution, nous supposons que l'utilité est linéaire dans le loisir (voir Hansen (1985)). La firme représentative utilise le capital  $K_t$  et le travail  $H_t$  pour produire un bien homogène final  $Y_t$ . La technologie est présentée par la fonction de production Cobb-Douglas suivante à rendement d'échelle constant

$$Y_t = K_t^\theta (Z_t H_t)^{1-\theta},$$

où  $\theta \in (0, 1)$ . La TFP, représentée par  $Z_t$  est supposée suivre un processus exogène de la forme

$$\log(Z_t) = \log(Z_{t-1}) + (\gamma_z - 1) + \sigma_z \eta_{zt},$$

où  $\gamma_z > 1$  est le taux de croissance de la TFP,  $\sigma_z > 0$  et  $\eta_{zt}$  est *iid* avec une moyenne nulle et une variance unitaire. Le stock de capital évolue selon la loi de mouvement suivante

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t,$$

où  $\delta \in (0, 1)$  est le taux de dépréciation constant et  $I_t$  représente l'investissement. Finalement, le bien final peut être consommé ou investi

$$Y_t = C_t + I_t.$$

La solution approximée du modèle est obtenue de la log-linéarisation des conditions d'équilibre stationnaire autour de l'état stationnaire déterministe (voir l'Appendice A pour plus de détails). Cela donne l'équation suivante pour les heures :

$$(1 - \psi L)\hat{h}_t = \nu \sigma_z \eta_{zt}, \quad (1.5)$$

où le chapeau représente la déviation relative par rapport à l'état stationnaire. Le paramètre  $\nu$  est positif et  $\psi \in (0, 1)$  est la racine stable de la version log-linéarisée du modèle. Les heures travaillées augmentent après une amélioration de la technologie et retournent graduellement vers leur état stationnaire. Notons que les heures peuvent présenter des fluctuations persistantes, mais elles sont stationnaires puisque  $\psi < 1$ .

Supposons maintenant que les heures travaillées  $\{h_t\}_{t=1}^{t=T}$  sont observées par l'économetre pour un échantillon fini  $T$  donné. Les heures observées évoluent selon l'équation de mesure suivante

$$h_t = \hat{h}_t + h_t^c, \quad (1.6)$$

où  $h_t$  est la réalisation observée des heures travaillées en log et en déviation par rapport à leur moyenne,  $\hat{h}_t$  est donné par l'équation (1.5) (la solution du modèle de cycle réel) et  $h_t^c$  représente une erreur de mesure de basse fréquence. Cette erreur de mesure de basse fréquence est supposée suivre un processus persistant presque stationnaire de la forme

$$\begin{aligned} \phi(L)\Delta h_t^c &= \left(1 - \left(1 - \frac{c}{\sqrt{T}}\right)L\right) \sigma_c \eta_{ct} \\ &= \frac{c}{\sqrt{T}} \sigma_c \eta_{ct} + \left(1 - \frac{c}{\sqrt{T}}\right) \sigma_c \Delta \eta_{ct}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

où  $c > 0$ ,  $\sigma_c > 0$  et  $\eta_{ct}$  est *iid* avec une moyenne nulle et une variance unitaire. De plus,  $\eta_{ct}$  est supposé être orthogonal à  $\eta_{zt}$  (de façon contemporaine et pour tous les retards ou "lead"). Le polynôme  $\phi(L)$  a toutes ses racines en dehors du cercle unitaire. Pour  $T$  fini  $h_t^c$  contient une racine unitaire. Lorsque  $T$  tend vers l'infini pour un  $c$  positif donné, le processus (1.7) se réduit à

$$\phi(L)h_t^c = \sigma_c \eta_{ct}.$$

Ainsi, en échantillon fini, les heures observées sont non stationnaires pour  $c > 0$ . Cette caractérisation des mesures d'erreurs de basse fréquence essaie de capturer la difficulté d'estimer de façon convergente les propriétés de retour à la moyenne du processus sous-jacent lorsque l'on ne dispose pas de données assez longues. La série semble non stationnaire pour l'échantillon dont on dispose, alors que le processus sous-jacent est stationnaire comme les heures travaillées per capita. Cette spécification suppose que la composante hautement persistante qui est difficilement approximée en échantillon fini dépend d'un choc orthogonal au choc technologique (ex : un choc d'écart au travail). Ceci peut aussi capturer les mouvements de basse fréquence dans la mesure standard des heures travaillées correspondant à un mouvement sectoriel dans les heures et le changement de la composition de la population en âge de travailler (Francis et Ramey (2009)). Selon ces auteurs, les comouvements de basse fréquence doivent être enlevés des séries de la croissance de la productivité du travail et des heures travaillées.

En utilisant la solution du modèle (1.5), l'équation de mesure (1.6) et l'erreur de mesure (1.7), les heures en première différence admettent la représentation moyenne mobile suivante

$$\Delta h_t = \Delta \hat{h}_t + \Delta h_t^c \quad (1.8)$$

$$= \left( \frac{\nu}{1 - \psi L} \right) \sigma_z \Delta \eta_{zt} + \frac{c \phi(L)^{-1}}{\sqrt{T}} \sigma_c \eta_{ct} + \phi(L)^{-1} \left( 1 - \frac{c}{\sqrt{T}} \right) \sigma_c \Delta \eta_{ct}. \quad (1.9)$$

De (1.9), on obtient que le choc technologique n'a pas d'effet de long terme, alors que le choc de basse fréquence sur l'erreur de mesure a un effet permanent sur les heures en échantillon fini.

En utilisant cette équation et les autres variables du modèle, on peut maintenant présenter certains exemples pour illustrer les représentation SMA (1.3) et (1.4). Notant  $\eta_{1t} = \eta_{zt}$  et  $\eta_{2t} = \eta_{ct}$ , l'équation (1.9) peut être réécrite dans la forme du processus de  $X_{2t}$ , où

$$a_{21}(L) = \left( \frac{\nu}{1 - \psi L} \right) \sigma_z,$$

$$\bar{a}_{22,T}(L) = \frac{c \phi(L)^{-1}}{\sqrt{T}} \sigma_c + \phi(L)^{-1} \left( 1 - \frac{c}{\sqrt{T}} \right) \sigma_c (1 - L).$$

Ce type de représentation pour  $X_{2t}$  sera toujours maintenu, i.e. les heures travaillées représentent la variable localement non stationnaire étudiée. La variable  $X_{1t}$  peut être interprétée de plusieurs façon, mais les exemples que l'on considère maintiennent l'hypothèse centrale que



$X_{1t}$  contient une racine unitaire exacte.

**Exemple 1 :**  $\Delta X_{1t}$  est le taux de croissance de la TFP. Dans ce cas, le processus pour  $X_{1t}$  se réduit à  $a_{11}(L) = \sigma_z$  et  $a_{12}(L) = 0$ . Cependant,  $\Delta X_{1t}$  peut être une mesure contaminée de la TFP, mais la contamination n'a pas d'effet de long terme en échantillon fini. Ce cas peut être traité en imposant  $a_{11}(L) = \sigma_z$  et  $a_{12}(L) = a_{12}^{(0)}$ , où  $a_{12}^{(0)}$  est un scalaire non nul. Une formulation plus générale pour  $a_{12}(L)$  peut aussi être utile pour prendre en compte des effets de contamination durable.

**Exemple 2 :**  $\Delta X_{1t}$  est la croissance de l'output. En utilisant la solution du modèle de cycle réel (voir appendice A), la croissance de l'output est donnée par

$$\Delta y_t = \sigma_z \eta_{zt} - \mu \frac{\sigma_z \Delta \eta_{zt}}{1 - \psi L}, \quad (1.10)$$

où  $\mu$  est une constante. Cela implique que  $a_{11}(L) = \sigma_z - \mu \frac{\sigma_z (1-L)}{1-\psi L}$  et  $a_{12}(L)$ . Notons que cette formulation très semblable peut être obtenue si l'on remplace la croissance de l'output par la consommation ou l'investissement. Les erreurs de mesures peuvent facilement être incluses en supposant que  $a_{12}(L)$  est non nul. L'hypothèse centrale que l'on maintient est que les erreurs de mesures n'ont pas d'effet de long terme sur l'output en échantillon fini. Dans un modèle plus complexe,  $\Delta y_t$  peut être affecté par un choc permanent autre que le choc technologique (voir Galí et Gertler (1999)).

**Exemple 3 :** Un cas intéressant est lorsque la variable non stationnaire considérée dans le modèle SVAR est contaminée par une variable hautement persistante. Par exemple, la variable de productivité utilisée dans la plupart des SVARs avec des restrictions de long terme est le taux de croissance de la productivité du travail (voir Galí et Gertler (1999); Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2003); Francis et Ramey (2005)). Pour illustrer cela, considérons le cas où l'économetre construit une mesure de la croissance de la productivité en utilisant la croissance de l'output donnée par (1.10) et le changement observé dans les heures données par (1.9) :

$$\Delta y_t - \Delta h_t = \sigma_z \eta_{zt} - \left( \frac{\mu + \nu}{1 - \psi L} \right) \sigma_z \Delta \eta_{zt} - \frac{c \phi(L)^{-1}}{\sqrt{T}} \sigma_c \eta_{ct} - \phi(L)^{-1} \left( 1 - \frac{c}{\sqrt{T}} \right) \sigma_c \Delta \eta_{ct}. \quad (1.11)$$

Dans ce cas,  $\Delta X_t = \Delta y_t - \Delta h_t$  avec  $\Delta X_{2t} = \Delta h_t$ . Par conséquent, la productivité du travail est contaminée par la composante de basse fréquence des heures. En d'autres termes, la variable  $X_{1t}$  est maintenant fonction du processus persistant presque stationnaire. Francis et Ramey (2009) ont déjà analysé ce problème en montrant que l'hypothèse d'identification de long terme utilisée dans les travaux empiriques est valide seulement lorsque la productivité du travail est définie en unitaire efficiente. Lorsque ce n'est pas le cas, la productivité du travail dépend de la TFP et du ratio des heures efficaces sur les heures agrégées. Dans notre cadre statistique, les effets de ce ratio en échantillon fini sont capturés par les mesures d'erreurs presque stationnaires. Il est important de noter ici que la croissance de l'output ne partage pas les mouvements de basse fréquence des heures empêchant un lien de cointégration.

#### 1.4 Estimation et inférence

On considère maintenant l'estimation et l'inférence avec nos deux spécifications de modèle SVAR. En pratique, la représentation moyenne mobile de forme réduite est retrouvée en effectuant un VAR d'ordre fini sur les données. Supposons maintenant que la représentation moyenne mobile structurelle puisse être caractérisée ou approximée, en petit échantillon par un VAR fini d'ordre  $p$ .<sup>12</sup> Considérons, la forme réduite du VAR( $p$ ) suivant :

$$D(L)X_t = \epsilon_t \quad \text{où} \quad D(L) = I - \sum_{i=1}^p D_i L^i = \begin{bmatrix} 1 - \sum_{i=1}^p d_{11}^{(i)} L^i & -\sum_{i=1}^p d_{12}^{(i)} L^i \\ -\sum_{i=1}^p d_{21}^{(i)} L^i & 1 - \sum_{i=1}^p d_{22}^{(i)} L^i \end{bmatrix}.$$

En multipliant les deux côtés par la matrice  $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12}^{(0)} \\ -b_{21}^{(0)} & 1 \end{bmatrix} = A_0^{-1}$ , on obtient le VAR en fonction des chocs structurels comme suit :  $B(L)X_t = \eta_t$  avec  $B(L) = B_0 D(L)$ . De façon

12. En considérant un ordre  $p \rightarrow \infty$  (à un certain taux) et  $\frac{p}{T} \rightarrow 0$ , Lewis et Reinsel (1985) montrent qu'une autorégression multivariée infinie peut être approximée par un VAR fini d'ordre  $p$ .

plus explicite, la première variable est donnée par

$$\Delta X_{1t} = \left( \sum_{i=1}^p d_{11}^{(i)} L^i - b_{12}^{(i)} \sum_{i=1}^p d_{21}^{(i)} L^i \right) \Delta X_{1t} + \left( \sum_{i=1}^p d_{12}^{(i)} L^i + b_{12}^{(0)} \left[ 1 - \sum_{i=1}^p d_{22}^{(i)} L^i \right] \right) X_{1t} + \eta_{1t}.$$

Imposer que la matrice structure de long terme  $A(1)$  est triangulaire par le bas implique que  $B_0 D(1)$  est aussi triangulaire par le bas par  $A(1) = D(1)^{-1} A_0$ . Le multiplicateur de long terme de la variable  $X_{2t}$  sur  $\Delta X_{1t}$  est alors zéro. Imposer cette contrainte donne

$$\begin{aligned} \Delta X_{1t} &= \left( \sum_{i=1}^p d_{11}^{(i)} - b_{12}^{(0)} \sum_{i=1}^p d_{21}^{(i)} L^i \right) \Delta X_{1t} + b_{12}^{(0)} \Delta X_{2t} + \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{b}_{12}^{(i)} L^i \Delta X_{2t} + \eta_{1t} \\ &= b_{11}(L) \Delta X_{1t-1} + b_{12}^{(0)} \Delta X_{2t-1} + \eta_{1t}, \end{aligned}$$

avec  $b_{11}^{(0)} = -d_{12}(1)/(1 - d_{22}(1))$  et  $\tilde{b}_{12}^{(i)} = -\sum_{j=i+1}^p (d_{12}^{(j)} - b_{12}^{(0)} d_{21}^{(j)} d_{22}^{(j)})$ . La deuxième équation est :

$$X_{2t} = \left( b_{21}^{(0)} \left[ 1 - \sum_{i=1}^p d_{11}^{(i)} L^i \right] + \sum_{i=1}^p d_{12}^{(i)} L^i \right) \Delta X_{1t} + \left( \sum_{i=1}^p d_{22}^{(i)} L^i - b_{21}^{(0)} \sum_{i=1}^p d_{12}^{(i)} L^i \right) X_{2t} + \eta_{2t},$$

qui peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} X_{2t} &= \left( b_{12}^{(0)} \left[ 1 - \sum_{i=1}^p d_{11}^{(i)} L^i \right] \Delta X_{1t} L^i \right) \Delta X_{1t} + b_{22}(1) X_{2t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{b}_{22}^{(i)} L^i \Delta X_{2t-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-1} \tilde{b}_{22}^{(i)} L^i \Delta X_{2t} + \eta_{2t} \\ &= b_{21}^{(0)} \Delta X_{1t} + b_{21}(L) \Delta X_{1t-1} + \tilde{b}_{22}(L) \Delta X_{2t-1} + \eta_{2t}, \end{aligned}$$

où  $b_{22}(1) = d_{22}(1) - b_{21}^{(0)} d_{12}(1)$  et  $\tilde{b}_{22}^{(i)} = -\sum_{j=i+1}^p b_{22}^{(j)} = -\sum_{j=i+1}^p (d_{12}^{(j)} - b_{12}^{(0)} d_{12}^{(j)})$ .

#### 1.4.1 Le modèle LSVAR

Considérons premièrement la spécification LSVAR. Avec cette spécification, la deuxième variable  $X_{2t}$  est incluse dans le VAR en niveau. Pour simplifier on suppose que la condition initiale est fixée à zéro (i.e.  $X_{20} = 0$ ), le processus structurel hautement persistant en niveau comme

$$X_{2t} = a_{21}(L) \eta_{1t} + a_{22}(1) \frac{c}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^t \eta_{2i} + \tilde{a}_{22,T}^*(L) \eta_{2t}. \quad (1.12)$$

Pour un  $T$  fini et  $c > 0$ , le deuxième choc structurel a un effet permanent sur la variable  $X_{2t}$ . La mesure finie de l'élément  $(2, 2)$  de la matrice  $A(1)$  est alors très sensible à la valeur du paramètre  $c$ . Pour  $T$  allant vers l'infini et  $c > 0$  le deuxième terme du côté droit de l'équation (1.12) ne disparaît pas de façon asymptotique mais converge vers un mouvement Brownien. Ainsi,

$$a_{22}(1) \frac{c}{\sqrt{T}} \eta_{2i} \xrightarrow{L} a_{22}(1) c W(r),$$

où  $W(r)$  est un mouvement Brownien pour  $r \in [0, 1]$ ,  $t = [Tr]$  et  $[\cdot]$  signifie la partie entière. Par conséquent, bien que  $\frac{1}{\sqrt{T}} \rightarrow 0$  lorsque  $t$  tend vers l'infini, la variance de  $X_{2t}$  est encore fonction du deuxième terme et en particulier dépend de la valeur  $c$ . Nous montrerons plus tard que cela introduit une distribution asymptotique non standard pour les fonctions de réponses résultantes du LSVAR. Pour la première variable  $\Delta X_{1t}$ , lorsque la spécification (1.3) est vraie, la restriction de long terme que seul le premier choc structurel a un effet permanent sur la première variable est valide pour tout  $T$  fini. Lorsque la première variable est contaminée par un processus hautement persistant  $X_{2t}$  comme la productivité du travail, la restriction est violée pour un  $T$  fini comme dans la spécification (1.4) laquelle introduit un biais potentiel d'échantillon fini de l'estimateur de la matrice de long terme  $A(1)$ . Ce biais de petit échantillon est transmis à l'estimateur de  $A_0$  et les fonctions de réponses résultantes de la relation suivante :  $A(0) = C(1)^{-1}A(1)$  et  $A(L) = C(L)A(0)$ . Cela explique pourquoi la réponse dynamique du LSVAR en utilisant la mesure "purifiée" de la TFP diffère de celle du LSVAR utilisant la productivité du travail et pourquoi cette dernière donne une réponse dynamique biaisée comme le montre les simulations de Chari, Kehoe et McGrattan (2008); Fève et Guay (2010).

Examinons maintenant de façon plus précise les propriétés asymptotiques du LSVAR. Nous nous intéressons à l'estimation des équations suivantes :

$$\Delta X_{1t} = b_{11}(L)\Delta X_{1t-1} + b_{12}^{(0)}\Delta X_{2t} + \tilde{b}_{12}(L)\Delta X_{2t-1} + \eta_{1t} \quad (1.13)$$

$$X_{2t} = b_{21}^{(0)}\Delta X_{1t} + b_{21}(L)\Delta X_{1t-1} + \tilde{b}_{22}(L)\Delta X_{2t-1} + \eta_{2t}. \quad (1.14)$$

On réécrit le modèle comme la fonction de  $b_{12}^{(0)}$  et  $b_{21}^{(0)}$  dont les propriétés asymptotiques déterminent le comportement à la limite des fonctions de réponses à l'impact et  $b_{22}^*$  défini comme



$b_{22}(1) - 1$  lequel détermine les propriétés asymptotiques de la dynamique des fonctions de réponses. Ainsi, le modèle peut être réécrit à un terme  $o_p(1)$  près comme

$$\Delta \tilde{X}_{1t} = b_{12}^{(0)} \Delta \tilde{X}_{2t} + \eta_{1t} \quad (1.15)$$

$$\Delta \tilde{X}_{2t} = b_{21}^{(0)} \Delta X_{1t} + b_{22}^* \tilde{X}_{2t-1} + \eta_{2t}, \quad (1.16)$$

où  $\Delta X_{1t}$ ,  $\tilde{\Delta X}_{2t}$  et  $\tilde{X}_{2t-1}$  sont définis comme les résidus de la projection de ces variables sur les variables prédéterminées  $W_{t-1} = (\Delta X_{1t-1}, \dots, \Delta X_{1t-p}, \Delta X_{2t-1}, \dots, \Delta X_{2t-p})'$  et  $b_{22}^* = b_{22}(1) - 1$ . Pour étudier les propriétés des fonctions de réponse, nous considérons l'estimateur des VI du modèle SVAR proposé par Shapiro et Watson (1988). Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2006); Gospodinov (2010) emploient cet estimateur pour analyser le cas où la deuxième variable est stationnaire en différence ou un processus presque stationnaire, respectivement. L'estimateur des VI de  $b_{12}^{(0)}$  avec  $X_{2t-1}$  comme instrument est donné par l'expression suivante :

$$\tilde{b}_{12}^{(0)} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2t-1} \Delta \tilde{X}_{1t}}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2t-1} \Delta \tilde{X}_{2t}} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2t-1} [b_{12}^{(0)} \Delta X_{2t} + \eta_{1t}]}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2t-1} \Delta \tilde{X}_{2t}},$$

ou de façon équivalente

$$\tilde{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{2t-1} \eta_{1t}}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{2t-1} \tilde{\Delta X}_{2t}} + o_p(1). \quad (1.17)$$

Considérons maintenant l'estimation du paramètre structurel  $b_{21}^{(0)}$  dans l'équation (1.16). Puisque  $\eta_{1t}$  et  $\eta_{2t}$  sont orthogonaux, les résidus  $\tilde{\eta}_{1t} = \Delta \tilde{X}_{1t} - \tilde{b}_{12}^{(0)} \Delta \tilde{X}_{2t}$  peuvent être utilisés comme instrument pour la variable endogène  $\Delta \tilde{X}_{1t}$ . Ainsi,  $\hat{\eta}_{1t} = \eta_{1t} - (\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \Delta \tilde{X}_{2t}$ . Définissons  $z_t = (\hat{\eta}_{1t}, X_{2t-1})'$  et  $x_t = (\Delta \tilde{X}_{1t}, \tilde{X}_{2t-1})'$ . L'estimateur des VI de  $\beta = (b_{21}^{(0)} - b_{12}^*)'$  est donné par  $\hat{\beta} = \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t x_t' \right]^{-1} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t \Delta \tilde{X}_{2t} \right]$ . Le théorème suivant donne les propriétés asymptotiques pour l'estimateur des VI de  $b_{12}^{(0)}$ ,  $b_{21}^{(0)}$  et  $b_{22}^*$ .

**Théorème 1** *Sous le modèle structurel (1.3) et (1.4) et les hypothèses du 1, l'estimateur des VI*

$\widehat{b}_{12}^{(0)} \xrightarrow{P} b_{12}^{(0)}$  et  $\widehat{\beta} \xrightarrow{P} \beta$  converge vers la vraie valeur. Ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{T} \left( \widehat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)} \right) &\xrightarrow{L} \frac{\left( \psi_{2,0}^{1/2} \xi_1 + \vartheta_1 \right)}{a_{22}^{(0)} b_{22}^* \widetilde{\psi}_2}, \\ \sqrt{T} \left( \widehat{b}_{21}^{(0)} - b_{21}^{(0)} \right) &\xrightarrow{L} \frac{\xi_2}{a_{11}^{(0)}} - \frac{\left( \psi_{2,0}^{1/2} \xi_1 + \vartheta_1 \right)}{a_{22}^{(0)} b_{22}^* \widetilde{\psi}_2}, \\ \sqrt{T} \left( \widehat{b}_{22}^* - b_{22}^* \right) &\xrightarrow{L} \frac{a_{12}^{(0)} \left( \psi_{2,0}^{1/2} \xi_1 + \vartheta_1 \right)}{a_{11}^{(0)} \widetilde{\psi}_2} - \left[ \frac{a_{12}^{(0)} b_{22}^*}{a_{11}^{(0)}} - \frac{\psi_{2,0}^{1/2}}{\widetilde{\psi}_2} \right] \xi_2 + \frac{\vartheta_2}{\widetilde{\psi}_2},\end{aligned}$$

où  $\vartheta_1 = a_{22}(1)c \int_0^1 W_2(r) dW_1(r)$ ,  $\vartheta_2 = a_{22}(1)c \int_0^1 W_2(r) dW_2(r)$  avec  $\xi = (\xi_1, \xi_2)' \sim \mathcal{N}(0, I_2)$ ,  $W_1(r)$  et  $W_2(r)$  sont deux mouvements brownien et  $\widetilde{\psi}_2$  et  $\psi_{2,0}^{1/2}$  sont définis dans l'appendice.

Le théorème 1 établit que les estimateurs des VI de  $b_{12}^{(0)}$ ,  $b_{21}^{(0)}$  et  $b_{22}^*$  sont convergents. Ce résultat n'est pas surprenant puisque lorsque  $T$  tend vers l'infini,  $X_{2t}$  est une variable stationnaire du second ordre. Le deuxième ensemble de résultats montre que la distribution asymptotique de  $\sqrt{T} \left( \widehat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)} \right)$  est une mixture de distribution gaussienne pour  $c$  plus grand que zéro. Le premier terme de la distribution asymptotique est la distribution asymptotique habituelle pour la variable stationnaire  $X_{2t}$ . Le terme  $\vartheta_1$  a une distribution Gaussienne conditionnelle sur  $W_2(\cdot)$  puisque  $W_1(\cdot)$  est indépendant de  $W_2(\cdot)$ . Cette composante donne des intervalles de confiance plus larges que ceux du cas standard avec une variable stationnaire en augmentant le terme  $c$  qui contrôle la non stationnarité locale. Le théorème 1 montre aussi que la distribution asymptotique de l'estimateur des VI de  $b_{21}^{(0)}$  est une fonction de la distribution asymptotique de  $b_{12}^{(0)}$  et donc partage les mêmes propriétés asymptotiques. Ceci est dû à l'utilisation d'un instrument qui dépend de l'estimateur  $\widehat{b}_{12}^{(0)}$ . Finalement, la distribution asymptotique de l'estimateur des VI du paramètre de persistance  $b_{22}^*$  est non standard et dépend de  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$ . Le terme  $\vartheta_2$  est du type d'une distribution d'une racine unitaire donnant des queues épaisses dans la distribution asymptotique.

A la lumière des modèles de cycles réels, le théorème 1 établit que peu importe la variable utilisée pour  $X_{1t}$  (TFP, output ou une bonne mesure de la productivité), le LSVAR donne

des estimateurs cohérents. La définition de  $X_{1t}$  n'a pas beaucoup d'importance pour la distribution asymptotique. Pour voir cela, considérons le cas où  $\Delta X_{1t}$  est le taux de croissance de la TFP, i.e.  $\Delta X_{1t} = \Delta z_t$ . Ceci implique que  $a_{12}^{(0)} = 0$  et ainsi  $b_{12}^{(0)} = 0$ . Dans ce cas, les distributions limites de  $\hat{b}_{12}^{(0)}$  et  $\hat{b}_{21}^{(0)}$  sont laissées non affectées. La seule différence concerne  $\hat{b}_{22}^*$  pour laquelle la distribution limite n'inclut pas la variable aléatoire  $\xi_1$  et  $\vartheta_1$ . Cependant, la distribution asymptotique est encore non standard puisqu'elle dépend de  $\vartheta_2$ . Encore une fois, de grandes valeurs de  $c$  tendent à augmenter l'intervalle de confiance pour  $b_{22}^*$ .

On examine maintenant le comportement asymptotique des fonctions de réponses suite à un choc permanent (e.g.,  $\eta_{1t}$ ). Selon la représentation SMA (2.13), soit  $a_{kj}^{(l)} = \frac{\partial X_{k,t+l}}{\partial \eta_{jt}}$  la fonction de réponse  $l$  période en avant pour un choc structurel normalisé  $j$  sur la variable  $X_k$ . Puisque les estimateurs de  $b_{12}^{(0)}$ ,  $b_{21}^{(0)}$  et  $b_{22}^*$  sont convergents selon le théorème 1 et les autres paramètres dans le VAR sont aussi estimés de façon convergente, on peut montrer que les fonctions de réponses  $a_{kj}^{(l)}$  résultantes du VAR sont aussi convergentes. Cependant, leurs distributions asymptotiques sont non standard de part la non stationnarité locale de  $X_{2t}$ . Un exemple simple peut donner une intuition sur l'effet de la non stationnarité locale de la distribution asymptotique des fonctions de réponses. Considérons le modèle VAR(1) suivant

$$\begin{aligned}\Delta X_{1t} &= b_{12}^{(0)} \Delta X_{2t} + \eta_{1t} \\ X_{2t} &= b_{21}^{(0)} \Delta X_{1t} + b_{22} X_{2t-1} + \eta_{2t}.\end{aligned}$$

Par exemple, dans ce cas l'estimateur de la fonction de réponse du premier choc sur la deuxième variable  $X_{2t}$  est donné par

$$\hat{a}_{21}^{(l)} = \frac{\hat{b}_{21} \left( \hat{b}_{22} - \hat{b}_{12}^{(0)} \hat{b}_{21}^{(0)} \right)^l}{(1 - \hat{b}_{12}^{(0)} \hat{b}_{21}^{(0)})^{l+1}},$$

et  $\hat{b}_{22}^* = \hat{b}_{22} - 1$ . A l'impact (i.e.,  $l = 0$ ), la distribution asymptotique des paramètres  $b_{12}^{(0)}$  et  $b_{21}^{(0)}$  laquelle est une mixture de distribution Gaussienne dépendant de  $c$ . Pour la propagation des chocs (i.e.,  $l > 0$ ), la distribution asymptotique dépend seulement de la distribution asymptotique de  $b_{22}^*$  laquelle est une distribution de racine unitaire impliquant une distribution à queue épaisse pour les fonctions de réponses. Dans un cas plus spécifique où  $\Delta X_{1t}$  est le taux de

croissance de la TFP,  $b_{12}^{(0)} = 0$ , l'estimateur de la fonction de réponse du premier choc sur la deuxième variable  $X_{2t}$  est donné par l'expression suivante simple

$$\hat{a}_{21}^{(l)} = \hat{b}_{21}^{(0)} \left( \hat{b}_{22}^* - 1 \right)^l.$$

#### 1.4.2 Le modèle DSVAR

Considérons maintenant la spécification DSVAR. De (1.4), la mesure en échantillon fini de l'impact de long terme est donnée par

$$A_T(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}(1)c/\sqrt{T} \\ 0 & a_{22}(1)c/\sqrt{T} \end{bmatrix}.$$

Lorsque la première variable  $\Delta X_{1t}$  n'est pas une fonction de la deuxième variable dans (1.3), le terme  $a_{12}(1)c/\sqrt{T}$  est égal à zéro et la restriction de long terme que seul le premier choc a un effet permanent sur la première variable est valide. Dans ce cas, la première variable correspond à la croissance de la productivité, puisque  $\Delta X_{1t} = \Delta y_t - \Delta h_t$ , et  $\Delta X_{2t} = \Delta h_t$  implique  $a_{12}(1)c/\sqrt{T} = -a_{22}(1)c/\sqrt{T}$ . La dépendance linéaire entre la croissance de la productivité du travail et  $\Delta h_t$  implique un comouvement de basse fréquence négatif entre ces variables. Au contraire des petits comouvements de basse fréquence discutés dans Gospodinov (2010), Gospodinov, Maynard et Pesavento (2011) qui sont présent dans la spécification LSVAR mais disparaissent dans la spécification DSVAR, les comouvements négatifs ici sont présents dans la spécification DSVAR.<sup>13</sup> En particulier, les comouvements de basse fréquence entre la productivité du travail et les heures dans le DSVAR, lesquels sont absents dans le DSVAR incluant la TFP et les heures expliquent, la différence dans les fonctions de réponses estimées entre ces deux spécifications.

Lorsque  $T \rightarrow \infty$ , la restriction de long terme mesurée par la matrice  $A(1)$  est violée

---

13. En utilisant les paramètres estimés du DSVAR, on peut calculer les comouvements de basse fréquence entre la croissance de la productivité et les heures travaillées en différence qui utilisent les données du secteur non manufacturier pour un intervalle de fréquence donnée, et en particulier, pour des fréquences nulles et dans son voisinage. En fait, il existe une corrélation négative de basse fréquence non négligeable entre la croissance de la productivité et les heures travaillées en différence. Ceci est cohérent avec notre spécification.



pour un  $T$  fini et cette matrice est triangulaire par le haut au lieu d'être triangulaire par le bas. Tant que  $c > 0$  et  $T$  fixé, deux chocs ont un effet de long terme sur  $X_{1t}$ , le choc permanent  $\eta_{1t}$  et le non permanent  $\eta_{2t}$ . Supposons maintenant que l'on utilise, comme d'habitude, un schéma d'identification de long terme pour trouver  $\eta_{1t}$ . Il s'en suit que l'effet de long terme de  $\eta_{2t}$  sur  $X_{1t}$  sera attribué à  $\eta_{1t}$ , entraînant une sur-estimation de la contribution de  $\eta_{1t}$ . Notons que lorsque  $c$  augmente, i.e. lorsque la variable  $X_{2t}$  devient de plus en plus persistante, l'effet de  $\eta_{2t}$  sur  $X_{1t}$  augmente, puisque la variable  $X_{1t}$  est contaminée par  $X_{2t}$ . En effet, le deuxième choc  $\eta_{2t}$  aura un effet permanent sur  $X_{2t}$  en échantillon fini. Lorsque la taille de l'alternative de non stationnarité locale  $c$  augmente, le choc  $\eta_{2t}$  aura un effet permanent sur  $X_{2t}$  en . Une fois de plus, puisque l'identification de long terme attribuera à  $\eta_{1t}$  de façon fautive l'effet permanent sur  $X_{1t}$  de  $\eta_{2t}$ , ce schéma d'identification conclura que le choc  $\eta_{1t}$  aura un effet permanent sur  $X_{2t}$  dont le signe dépendra du signe de  $a_{12}(1)$ . Notons aussi que lorsque  $T \rightarrow \infty$ , seul l'élément  $(1, 1)$  est différent de zéro et la matrice  $A_\infty(1)$  est singulière de par la sur-différenciation de  $X_{2t}$ .

La prochaine proposition caractérise de façon plus précise la mesure en échantillon fini à la fréquence zéro lorsqu'une structure triangulaire par le bas est imposée à la matrice  $A_T(1)$  pour le modèle DSVAR.

**Proposition 1** *Considérons un modèle DSVAR avec les variables  $\Delta X_{1t}$  et  $\Delta X_{2t}$  définies dans l'équation (1.4). La mesure en échantillon fini de l'impact de long terme des chocs structurels obtenue en utilisant une décomposition de Choleski est donnée par la matrice diagonale par le bas suivante*

$$\text{chol}(A_T(1)A_T(1)') = \begin{bmatrix} (a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T)^{1/2} & 0 \\ \frac{a_{12}(1)a_{22}(1)c^2/T}{(a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T)^{1/2}} & \left( a_{22}(1)^2 c^2/T - \frac{a_{12}(1)^2 a_{22}(1)^2 c^4/T^2}{a_{11}(1) + a_{12}(1)^2 c^2/T} \right)^{1/2} \end{bmatrix},$$

où  $\text{chol}(\cdot)$  est la décomposition de Choleski.

En imposant que le deuxième choc n'a pas d'effet de long terme sur la variable  $X_{1t}$  im-

plique que la fonction de réponse du choc permanent  $\eta_{1t}$  est biaisée. Le biais en échantillon fini introduit en imposant faussement que la matrice triangulaire par le bas dépend des paramètres  $a_{12}(1)$ . Premièrement, la mesure en échantillon fini de l'impact de long terme du choc permanent sur la première variable est exagérée puisque  $(a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2 / T)^{1/2} > a_{11}(1)$  pour  $a_{12}(1) \leq 0$ . Deuxièmement, la mesure en échantillon fini de l'impact de long terme du premier choc structurel  $\eta_{1t}$  sur la deuxième variable est du même signe que  $a_{22}(1)$ . Pour des valeurs négatives de  $a_{12}(1) = -a_{22}(1)$ , qui correspondent au cas de la productivité du travail, la mesure en échantillon fini de l'impact de long terme est négative. La contamination de la mesure en échantillon fini de l'impact de long terme est alors transmise à l'estimateur de la matrice de relation  $A_0$  par l'expression :  $A_0 = C(1)^{-1}A(1)$ . Ce résultat est important puisqu'il établit que la non stationnarité locale des heures travaillées per capita peut mener à un biais à la baisse dans l'estimé de la réponse dynamique à partir du modèle DSVAR (lorsque  $a_{12}(1)$  est négatif), malgré le fait que la spécification en première différence semble être adéquate en échantillon fini.

On peut facilement traduire les résultats de la proposition au dessus en termes de modèle de cycle réel. Premièrement, considérons que  $\Delta X_{1t}$  est la croissance de la productivité du travail donnée par (1.11) et que l'économètre estime un modèle VAR avec la spécification en différence pour les heures observées  $\Delta h_t$ . A partir des équations (1.11) et (1.9), la mesure en échantillon fini de la matrice d'impact de long terme est donnée par

$$A_T(1) = \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \frac{c\phi(1)^{-1}}{\sqrt{T}}\sigma_c \end{bmatrix}.$$

La décomposition de Choleski de la matrice de covariance de long terme donne

$$\text{chol}(A_T(1)A_T(1)') = \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \frac{c\phi(1)^{-1}}{\sqrt{T}}\sigma_c \end{bmatrix}.$$

Les réponses de long terme de la TFP et des heures obtenues du modèle DSVAR sont convergentes avec les modèles de cycles réels, même en échantillon fini. Le paramètre  $c$  n'affecte pas les estimés des réponses de long terme de la TFP et des heures suite à un choc technologique. Ce résultat est important puisqu'il correspond au cas où  $b_{12}^{(0)} = 0$ . Comme montré en dessous,

dans ce cas, la réponse de court terme obtenue à partir du DSVAR est non biaisée et les réponses dynamiques peuvent présenter un petit biais si un nombre suffisant de retards est inclus dans le modèle VAR. Couplés avec une réponse de long terme estimée, nos résultats indiquent que le DSVAR peut presque bien trouver les réponses dynamiques des heures travaillées lorsque l'économètre utilise une mesure parfaite de la TFP.

Pour étudier plus en détail les propriétés des estimateurs résultants du DSVAR, les estimés de forme réduite correspondant obtenus du VAR( $p$ ) pour les deux variables en différence sont donnés par :

$$D(L)X_t = \epsilon_t,$$

où le vecteur  $X_t$  est maintenant défini comme  $X_t = (\Delta X_{1t}, \Delta X_{2t})'$ . En multipliant les deux cotés par  $B_0 = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12}^{(0)} \\ -b_{21}^{(0)} & 1 \end{bmatrix} = A_0^{-1}$ , on obtient le VAR en fonction des chocs structurels :  $B(L)X_t = \eta_t^*$  avec  $B(L) = B(0)D(L)$ . Imposer que la matrice d'impact de long terme est triangulaire par le bas implique que  $B_0 D(1)$  est aussi triangulaire par le bas. Le multiplicateur de long terme de la variable  $\Delta X_{2t}$  sur  $\Delta X_{1t}$  est alors zéro. En imposant cette contrainte on obtient pour la première équation

$$\Delta X_{1t} = b_{11}(L)\Delta X_{1t-1} + b_{12}^{(0)}\Delta^2 X_{2t} + \tilde{b}_{12}(L)\Delta^2 X_{2t-1} + \eta_{1t}^*, \quad (1.18)$$

et pour la deuxième équation :

$$\Delta X_{2t} = b_{21}^{(0)}\Delta X_{1t} + b_{21}(L)\Delta X_{1t-1} + b_{22}(1)\Delta X_{2t-1} + \tilde{b}_{22}(1)\Delta X_{2t-1} + \tilde{b}_{22}(L)\Delta^2 X_{2t-1} + \eta_{2t}^*. \quad (1.19)$$

De façon asymptotique, le LSVAR est correctement spécifié alors que le DSVAR est mal spécifié. Pour étudier les propriétés asymptotiques des estimateurs obtenues avec la spécification DSVAR, on réécrit l'équation (1.13) du LSVAR correctement spécifiée telle que les variables  $X_{2t}$  et ses retards apparaissent en deuxième différence comme une fonction des paramètres  $b_{12}^{(0)}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \Delta X_{1t} &= b_{11}(L)\Delta X_{1t-1} + b_{12}^{(0)}\Delta X_{2t} + \tilde{b}_{12}(L)\Delta X_{2t-1} + \eta_{1t} \\ &= b_{11}(L)\Delta X_{1t-1} + b_{12}^{(0)}\Delta^2 X_{2t} + \tilde{b}_{12}(L)\Delta^2 X_{2t-1} + \eta_{1t}^*, \end{aligned} \quad (1.20)$$

avec  $\eta_{1t}^* = -b_{12}^{(0)}\Delta X_{2t-1} - \tilde{b}_{12}(L)\Delta X_{2t-2} + \eta_{1t}$ . En comparant l'équation (1.18) avec l'équation (1.20), on voit que l'erreur  $\eta_{1t}^*$  est une fonction des valeurs retardées de  $\Delta X_{2t}$ . En réécrivant aussi la deuxième équation du LSVAR, on peut comparer avec la deuxième équation du DSVAR. Ainsi,

$$X_{2t} = b_{21}^{(0)}\Delta X_{1t} + b_{21}(L)\Delta X_{1t-1} + b_{22}(1)X_{2t-1} + \tilde{b}_{22}(L)\Delta X_{2t-1} + \eta_{2t},$$

et en réécrivant en différence

$$\Delta X_{2t} = b_{21}^{(0)}\Delta X_{1t} + b_{21}(L)\Delta X_{1t-1} + b_{22}(1)\Delta X_{2t-1} + \tilde{b}_{22}(L)\Delta^2 X_{2t-1} + \eta_{2t}^*, \quad (1.21)$$

avec  $\eta_{2t}^* = -b_{21}^{(0)}\Delta X_{1t-1} - b_{21}(L)b_{22}(L)\Delta X_{1t-2} + \eta_{2t} - \eta_{2t-1}$ .

Comme on a procédé pour le LSVAR, la première équation du DSVAR peut être réécrite comme

$$\Delta \tilde{X}_{1t} = b_{12}^{(0)}\Delta^2 \tilde{X}_{2t} + \eta_{1t}^*, \quad (1.22)$$

où  $\Delta \tilde{X}_{1t}$  et  $\Delta^2 \tilde{X}_{2t}$  sont définis comme les résidus de la projection des variables prédéterminées  $(\Delta X_{1,t-1}, \dots, \Delta^2 X_{1,t-p}, \dots, \Delta^2 X_{2,t-p-1})$ . En utilisant  $\Delta X_{2t-1}$  comme instrument, l'estimateur des VI de  $b_{12}^{(0)}$  dans l'équation (1.22) est donné par l'expression suivante :

$$\hat{b}_{12}^{(0)} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta X_{2t-1} \Delta \tilde{X}_{1t}}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta X_{2t-1} \Delta^2 \tilde{X}_{2t}}$$

Puisque  $\Delta X_{2t-1}$  et  $\eta_{1t}^*$  sont corrélés de par l'équation (1.20), l'estimateur DSVAR de  $b_{12}^{(0)}$  est asymptotiquement biaisé. Considérons maintenant l'estimation des paramètres de l'équation (1.19). Comme dans le cas LSVAR, on utilise les résidus  $\hat{\eta}_{1t}^* = \Delta \tilde{X}_{1t} - \hat{b}_{12}^{(0)}\Delta^2 \tilde{X}_{2t}$  comme instrument pour la variable endogène  $\Delta X_{1t}$ . Ainsi,  $\hat{\eta}_{1t}^* - (\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)})\Delta^2 \tilde{X}_{2t}$ . L'estimateur est bien sûr asymptotiquement biaisé de par la corrélation entre  $\eta_{1t}^*$  et  $\eta_{2t}^*$  comme on peut le voir dans l'expression dérivée au dessus. L'estimateur de  $b_{22}(1)$  est aussi non convergent de par la corrélation entre  $\Delta X_{2t-1}$  et  $\eta_{2t}^*$ .

Maintenant on suppose que le DSVAR est estimé avec une mesure de la TFP "purifiée". Dans ce cas, l'équation du DSVAR est donnée par :

$$\Delta X_{1t} = b_{11}(L)\Delta X_{1t-1} + \eta_{1t}^*.$$



La première équation du DSVAR est maintenant la même que celle du LSVAR. L'estimateur des VI de  $\widehat{b}_{12}^{(0)}$  défini au dessus est alors convergent et converge vers zéro puisque  $\eta_{1t}^* = \eta_{1t}$  dans ce cas. Les résidus résultants  $\eta_{1t}^*$  peuvent être utilisés comme instrument dans la deuxième équation pour l'estimation du paramètre  $b_{21}^{(0)}$ . Cela donne aussi un estimateur convergent de  $b_{21}^{(0)}$  grâce à l'absence de corrélation entre  $\eta_{1t}^*$  et  $\eta_{2t}^*$ . Cependant l'estimateur de  $b_{22}(1)$  est encore convergent. Le biais asymptotique de l'estimateur de  $b_{22}(1)$  est fonction du terme suivant :  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Delta X_{2t-1} \eta_{2t}^*$ . Une partie importante de ce biais viens de la présence d'une racine unitaire dans le terme d'erreur  $\Delta \eta_{2t}$  résultant de la sur-différenciation de la deuxième équation du VAR. Ce biais peut être réduit en augmentant le nombre de retards dans le modèle DSVAR (voir Marcet (2006)).

### 1.5 Simulation à partir d'un modèle DSGE avec frictions réelles

Cette section présente les simulations à partir du modèle DSGE calibré et estimé avec des données U.S.<sup>14</sup> Le modèle utilisé pour les simulations étend celui de la section 1.3.2 en permettant des habitudes de consommation et des coûts d'ajustement d'investissement. Les deux mécanismes ont montré leur utilité pour prendre en compte la dynamique des variables macroéconomiques en particulier pour ce qui est des propriétés de persistance (voir e.g. Beaudry et Guay (1996); Christiano, Boldrin et Fisher (2001); Christiano, Eichenbaum et Evans (2005)). Les choix de consommation intertemporelle ne sont pas séparables dans le temps, et les flux de consommation de services sont une fonction linéaire des décisions de consommation courante et retardée. La fonction d'utilité intertemporelle espérée du ménage représentatif est donnée par

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left\{ \log(C_{t+i} - bC_{t+i-1}) - \frac{H_{t+i}^{1+\nu}}{1+\nu} \right\},$$

où  $\nu$  est l'inverse de l'élasticité de *Frisch* de l'offre de travail. Du coté de la technologie, nous adoptons exactement la même spécification que celle adoptée dans la section 1.3.2. Rappelons que la TFP est supposée suivre un processus de marche aléatoire avec une dérive. Le bien homogène produit  $Y_t$  peut être utilisé pour la consommation  $C_t$  et l'investissement  $I_t$ . L'accumulation

---

14. Voir Erceg, Guerrieri et Gust (2005); Chari, Kehoe et McGrattan (2008); Christiano, Eichenbaum et Vigfusson (2006); Fève et Guay (2009, 2010) pour d'autres simulations.

du capital est gouvernée par le loi de mouvement suivante

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + \left[ 1 - S\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right) \right] v_t I_t,$$

où  $\delta \in (0, 1)$  est le taux de dépréciation constant et  $S(\cdot)$  reflète la présence des coûts d'ajustement. On suppose que  $S(\cdot)$  satisfait (i)  $S(\gamma_z) = S'(\gamma_z) = 0$  et (ii)  $\zeta = S''(\gamma_z)\gamma_z^2 > 0$ . Il suit que l'état stationnaire du modèle ne dépend pas du paramètre  $\zeta$  alors que ses propriétés asymptotiques oui. Dans Smets et Wouters (2007), la variable  $v_t$  représente la perturbation du processus de technologie spécifique à l'investissement et il est supposé suivre un processus autorégressif du première ordre

$$\log(v_t) = \rho_v \log(v_{t-1}) + \sigma_v \eta_{v,t},$$

où  $|\rho_v| < 1$ ,  $\sigma_v > 0$  et  $\eta_{v,t}$  est iid avec une moyenne nulle et variance unitaire.

Comme d'habitude, le modèle est déflaté pour la composante stochastique de tendance  $Z_t$  et log linéarisé autour de l'état stationnaire déterministe pour obtenir une représentation espace état. Soit  $\Psi$  l'ensemble des paramètres du modèle. Les paramètres de la solution espace état du modèle dépendent d'une fonction compliquée non linéaire de  $\Psi$ . Nous divisons  $\Psi$  en deux vecteurs  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ . Le premier vecteur  $\Psi_1 = \{\beta, \alpha, \delta, \nu\}$  inclut les paramètres qui sont calibrés pour l'économie U.S. avant l'estimation. Le taux d'escompte  $\beta$  est choisi tel que le rendement annuel du capital à l'état stationnaire égale 3.6%. L'élasticité de l'output par rapport au travail  $1 - \alpha$  est égale à 0.67, ce qui correspond à la moyenne de la part du revenu du travail par rapport à l'output. Le taux de dépréciation du capital physique  $\delta$  est fixé à 0.0153. La valeur de  $\nu = 2$  dans la fonction d'utilité est fixée selon les estimés précédents avec les données U.S. (Smets et Wouters (2007)). Toutes les valeurs sont reportées dans le tableau A.2. Le deuxième vecteur  $\Psi_2 = \{b, \zeta, \gamma_z, \sigma_z, \rho_v, \sigma_v, \rho_c, c, \sigma_c\}$  contient les paramètres qui résument les frictions réelles du modèle (habitude de consommation  $b$  et la dynamique des coûts d'ajustement  $\zeta$ ), la loi de mouvement des deux chocs structurels ( $\gamma_z, \sigma_z, \rho_v$  et  $\sigma_v$ ) et l'erreur de mesure. Comme dans notre modèle d'illustration, on suppose que les heures actuelles diffèrent de celles du modèle par une mesure d'erreur  $h_t^c$  qui suit le processus

$$(1 - \rho_c L) \Delta h_t^c = \left( 1 - \left( 1 - \frac{c}{\sqrt{T}} \right) L \right) \sigma_c \eta_{ct},$$

où  $|\rho_c| < 1$ ,  $\sigma_c > 0$  et  $\eta_{ct}$  est iid avec une moyenne nulle et une variance unitaire. Lorsque  $c > 0$ , cette erreur de mesure est non stationnaire en petit échantillon (lorsque  $T$  est fixé), mais stationnaire de façon asymptotique (lorsque  $T \rightarrow \infty$ ).

De la représentation espace état résultant de la version log linéarisé du modèle et sous l'hypothèse de chocs Gaussien, la fonction de log-vraisemblance peut être évaluée. Les paramètres du vecteur  $\Psi_2$  sont estimés en maximisant cette fonction. Nous utilisons des données trimestrielles couvrant la période 1948T1-2007T4. Les variables observées sont le taux de croissance du PIB réel, les dépenses de consommations réelles (services et non durable) et les heures totales travaillées (per capita). Les heures travaillées totales sont empruntées de Francis et Ramey (2009). Les résultats de l'estimation sont présentés dans la deuxième colonne du tableau A.2. Les paramètres sont estimés de façon précises et sont en accord avec les estimations précédentes pour l'économie U.S. (voir Smets et Wouters (2007)). Le paramètre de persistance d'habitude  $b$  est positif et significatif. Le paramètre de coût d'ajustement  $\zeta$  a une grande valeur. Ces estimateurs sont cruciaux dans la réplcation des données U.S., spécialement l'autocorrélation de la croissance de l'output et du log des heures. Par exemple, en fixant  $b = \psi = 0$  on réduit de façon très importante la log-vraisemblance et le ratio de vraisemblance rejette fortement cette restriction. En d'autres termes, nos résultats d'estimation favorisent la version du modèle avec un grand nombre de frictions réelles. Le choc d'investissement présente une petite persistance mais son écart type est significativement plus haut que celui du choc de technologie permanent. Finalement, le paramètre estimé de l'erreur de mesure rejette la représentation de marche aléatoire pure.

En utilisant les valeurs estimées, nous calculons la réponse dynamique des heures travaillées suite à un choc technologique impliqué par le modèle (voir le graphique A.4). Les heures travaillées diminuent à l'impact et leurs réponses deviennent positives de façon persistante après un an. Ces résultats sont encore en accord avec ceux obtenus de l'estimation de modèle DSGE (voir Smets et Wouters (2007)), des modèles DSVAR (voir Galí et Gertler (1999); Francis et Ramey (2009)) et des mesures directes de la TFP (voir Basu, Fernald et Kimball (2006)). Dans notre modèle cette réponse des heures est le résultat de l'interaction entre la persistance des habitudes dans la consommation et des coûts d'ajustement sur l'investisse-



ment. Comme souligné par Francis et Ramey (2005), des persistances d'habitudes assez fortes impliquent une réponse de la consommation calme. Face à un choc de technologie positif, les ménages peuvent mettre les ressources excédentaires dans l'investissement. Cependant, un degré élevé de coût d'ajustement sur le capital implique que l'investissement additionnel est très coûteux. Par conséquent, les ménages choisissent de dépenser leur nouvelle richesse sur le seul choix restant, i.e. ils augmentent leurs loisirs. Nous utilisons aussi les estimés du modèle DSGE dans le but de calculer certaines statistiques qui résument le comportement des séries temporelles des deux mesures des heures travaillées : la première, nommée *heures contaminées*, inclut les erreurs de mesures et la deuxième est directement obtenue du modèle DSGE estimé. Par conséquent, on obtient deux mesures de productivité du travail dépendant des mesures des heures travaillées. Nous évaluons la contribution du choc technologique sur la croissance de la productivité du travail et le changement des heures travaillées. Ce choc explique une petite portion des fluctuations des heures travaillées contaminées puisque il représente 12.43% de leur variance. En revanche, le choc de technologie explique 51.19% de la croissance de la productivité du travail. Ceci est très différent du cas de la mesure des heures non contaminées. Dans ce cas, le choc de technologie explique 73.04% de la croissance de la productivité. Le calcul des fonctions d'autocorrélation des deux mesures des heures sont reportées dans la figure A.5. A des fins de comparaison ce graphique inclut les fonctions d'autocorrélations des heures totales et ajustées de Francis et Ramey (2009). La figure montre clairement que la mesure contaminée des heures présente plus de persistance que la mesure non contaminée, en accord avec les données réelles.

On utilise maintenant le modèle pour simuler des données artificielles, sur lesquelles nous répliquons les différents VARs utilisés dans la littérature pertinente et dans la partie empirique de l'article. Pour calculer les séries temporelles artificielles des variables d'intérêts, nous tirons  $S = 1000$  réalisations indépendantes aléatoires de l'innovation de la TFP  $\eta_{zt}$ , de l'innovation de la technologie spécifique à l'investissement  $\eta_{vt}$  et de l'innovation des erreurs de mesures  $\eta_{ct}$ . En utilisant les paramètres du tableau A.2, on calcule  $S = 1000$  sentiers d'équilibre pour le taux de croissance de la productivité du travail et des heures travaillées. Dans toutes les expériences, la taille de l'échantillon est égale à 240 trimestres, comme dans les données actuelles.

Dans le but de réduire l'influence des conditions initiales, les échantillons simulés incluent 250 points initiaux qui sont par la suite enlevés avant l'estimation des modèles VAR. Pour chacun des tirages, le nombre de retard dans les modèles VAR est fixé à 4, la valeur habituellement utilisée dans les études empiriques. Les résultats sont montrés dans les figures A.6-A.9.

Considérons premièrement les modèles SVAR qui incluent la productivité du travail et les heures travaillées (voir le haut des graphiques A.6 et A.7). Nos résultats principaux sont les suivants : Premièrement, la réponse des heures obtenue à partir du modèle DSVAR présente un biais à la baisse lorsque la mesure des heures est contaminée et ce biais tient à long terme. Ce biais décroît lorsque les mouvements de basse fréquence sont enlevés des heures travaillées. Deuxièmement, les mesures des heures (contaminées et non contaminées) dans le modèle LSVAR n'affectent pas les réponses estimées (le LSVAR sur-estime la vraie réponse). Troisièmement, l'intervalle de confiance est plus petit et décroît lorsque l'horizon de la réponse augmente lorsque l'on utilise les heures non contaminées à la place de celles contaminées. Bien sûr, les heures non contaminées sont moins volatiles que celles contaminées, puisque ces dernières incluent les erreurs de mesures. Cependant, nous refaisons le même exercice en ajustant pour l'écart type du choc technologique et le choc d'investissement, tel que la volatilité des heures non contaminées soit égale à la volatilité des heures contaminées. On inclut alors cette nouvelle série dans le modèle LSVAR et on compare la réponse du LSVAR avec les heures contaminées, ce qui est présenté dans haut de la figure A.6. On obtient de grands intervalles de confiance pour les réponses estimées, mais ils diminuent avec l'horizon de la réponse. Ceci est bien différent du cas avec les heures contaminées, pour lesquelles l'intervalle de confiance ne diminue pas avec l'horizon. Nous analysons aussi le cas des erreurs de mesures stationnaires (on fixe  $c = 0$ ). On ajuste la volatilité du choc des erreurs de mesures (pour obtenir une variance des heures similaires) et ensuite nous calculons les heures contaminées. Encore un fois, on obtient un intervalle de confiance qui diminue lorsque l'horizon diminue. Tous ces résultats confirment nos résultats analytiques.

On considère maintenant le modèle SVAR qui inclut la TFP et les heures (voir le bas des figures A.6 et A.7). Maintenant, la première variable que l'on utilise pour identifier le choc de technologie n'est pas polluée par les mouvements de basse fréquence dans les heures conta-

minées. Dans ce cas (comme cela est montré dans la proposition 1), les mouvements de basse fréquence dans les heures contaminées sont seulement affectés par la variance de long terme des heures travaillées. Les figures montrent que lorsque l'économètre utilise une bonne mesure de la technologie, la spécification des heures dans le modèle VAR n'a pas d'importance. Chaque SVAR estime de façon convergente les effets dynamiques des chocs technologiques sur les heures. En même temps, les résultats précédents s'appliquent : on obtient un intervalle de confiance plus petit si les heures non contaminées sont incluses dans le modèle VAR et cet intervalle de confiance diminue avec l'horizon de la réponse.

Finalement, nous analysons la réponse dynamique des mesures de productivités (productivité du travail, TFP) suite à une innovation technologique. Ceci est présenté dans les figures A.8 et A.9. Suivant la proposition 1, le modèle DSVAR utilisant la productivité du travail avec les heures contaminées doit impliquer une sur-estimation de la vraie réponse de long terme. Ceci est présenté dans le bas de la figure A.8. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les deux chocs augmentent de façon permanente la productivité du travail (le choc technologique et les erreurs de mesures) et ceci corrompt la stratégie d'identification de long terme. Notons que les réponses de court terme estimées diffèrent de façon significative de la vraie réponse et l'impact de long terme est significativement sur-estimé comme attendu. Lorsque ces mouvements de basse fréquence sont enlevés des heures travaillées, le modèle DSVAR donne des réponses dynamiques proche de la vraie. La vraie réponse est maintenant dans l'intervalle de confiance de la réponse estimée. Les simulations avec le modèle LSVAR ne donnent pas de preuves vraiment claires. Il apparaît que la réponse estimée est moins biaisée que celle obtenue dans le modèle DSVAR et les résultats semblent moins sensibles aux mouvements de basses fréquences dans les heures travaillées. Lorsque la mesure de productivité dans le modèle VAR est maintenant la TFP, les modèles SVAR donnent une réponse dynamique plus précise.

## 1.6 Conclusion

Cet article étudie l'impact des propriétés statistiques des fonctions de réponses dans les SVARs avec une variable persistante comme les heures travaillées et des restrictions de



long terme. On montre que les fonctions de réponses estimées à partir des modèles LSVAR et DSVAR sont biaisées en échantillons finis si la mesure de productivité est contaminée par des mouvements de basses fréquences dans les heures. Cependant, si l'économètre utilise une bonne mesure de la TFP, le biais disparaît pour les spécifications LSVAR et DSVAR. Nous montrons aussi que les estimateurs du LSVAR sont asymptotiquement convergents, mais présentent une distribution limite non standard. Cela explique le grand intervalle de confiance pour la réponse dynamique dans le cadre du LSVAR. L'estimation à partir des données U.S. et des simulations des modèles de cycle réels avec des frictions réelles confirment nos résultats théoriques.

Nos résultats sont un guide pour améliorer la précision des modèles SVAR avec des restrictions de long terme. Premièrement, nos résultats empiriques et théoriques démontrent que davantage d'efforts doivent être faits pour obtenir de bonnes mesures de la TFP comme cela a été fait par Basu, Fernald et Kimball (2006) à la fréquence annuelle, puisque inclure des variables hautement persistantes dans les modèles SVAR est moins problématique dans ce cas. Deuxièmement, nos résultats montrent qu'une partie des mauvais résultats des SVARs est due à la persistance élevée des heures. Certains articles précédents ont essayé de traiter ce problème. Francis et Ramey (2009) construisent une mesure correcte des heures travaillées per capita qui est ajustée pour les mouvements de basses fréquences dans l'emploi du gouvernement, la scolarité, et le vieillissement de la population. Fève et Guay (2010) proposent une méthode simple en deux étapes. Dans la première étape, un estimateur convergent du choc technologique est obtenu avec le SVAR en excluant les heures travaillées. La réponse des heures qui suit une amélioration technologique est estimée dans une deuxième étape en utilisant différentes projections linéaires sur les innovations technologiques estimées. Il est intéressant de noter, que ces trois articles montrent que les spécifications en niveau et en première différence donnent des réponses dynamiques très similaires dans les SVARs, i.e. un déclin à court terme des heures suivi d'une réponses en forme de cloche.

## APPENDICE A

### FIGURES ET TABLEAUX

Tableau A.1: Effet de long terme d'une amélioration technologique sur les mesures de productivité (en %)

	Modèle LSVAR	Modèle DSVAR
Résidus de Solow	1.51 [0.90 ; 2.93]	1.63 [0.86 ; 2.48]
Mesure "purifiée" de la TFP	1.33 [0.80 ; 2.18]	1.39 [0.78 ; 2.09]
Productivité du travail	2.05 [1.06 ; 3.92]	2.32 [1.10 ; 3.77]

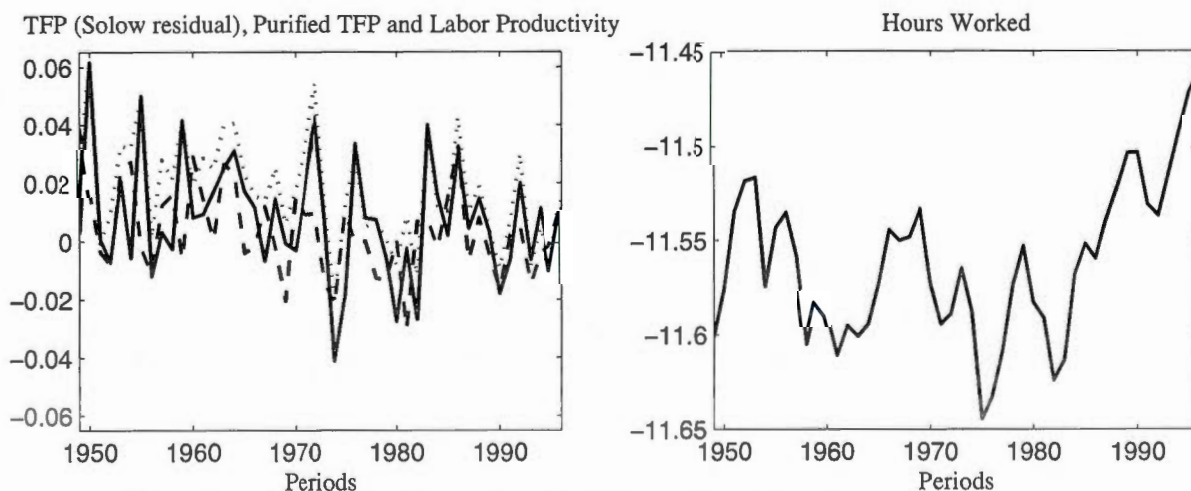
**Notes :** l'intervalle de confiance à 95% entre crochet est obtenu à partir de la technique Bootstrap classique avec 1000 réplifications.

Tableau A.2: Valeur des paramètre de  $\Psi$ 

$\Psi_1$ Calibré		$\Psi_2$ Estimé		
Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Écart-type
$\beta$	0.9950	$b$	0.4063	0.0380
$\alpha$	0.3300	$\zeta$	23.8476	2.6220
$\delta$	0.0153	$\gamma_z$	1.0035	0.0008
$\nu$	2.0000	$\sigma_z$	0.0128	0.0006
		$\rho_v$	0.3131	0.0659
		$\sigma_v$	0.6669	0.0743
		$\rho_c$	0.6893	0.1138
		$c$	7.4120	2.0615
		$\sigma_c$	0.0071	0.0004

Notes : Les données U.S. trimestrielle couvrent la période échantillonnale 1948 :1-2007 :4. Le vecteur des données observées inclut le taux de croissance du PIB réel, les dépenses de consommations réelles (non durable et services) et les heures travaillées (par capita).

Figure A.1: Données U.S.

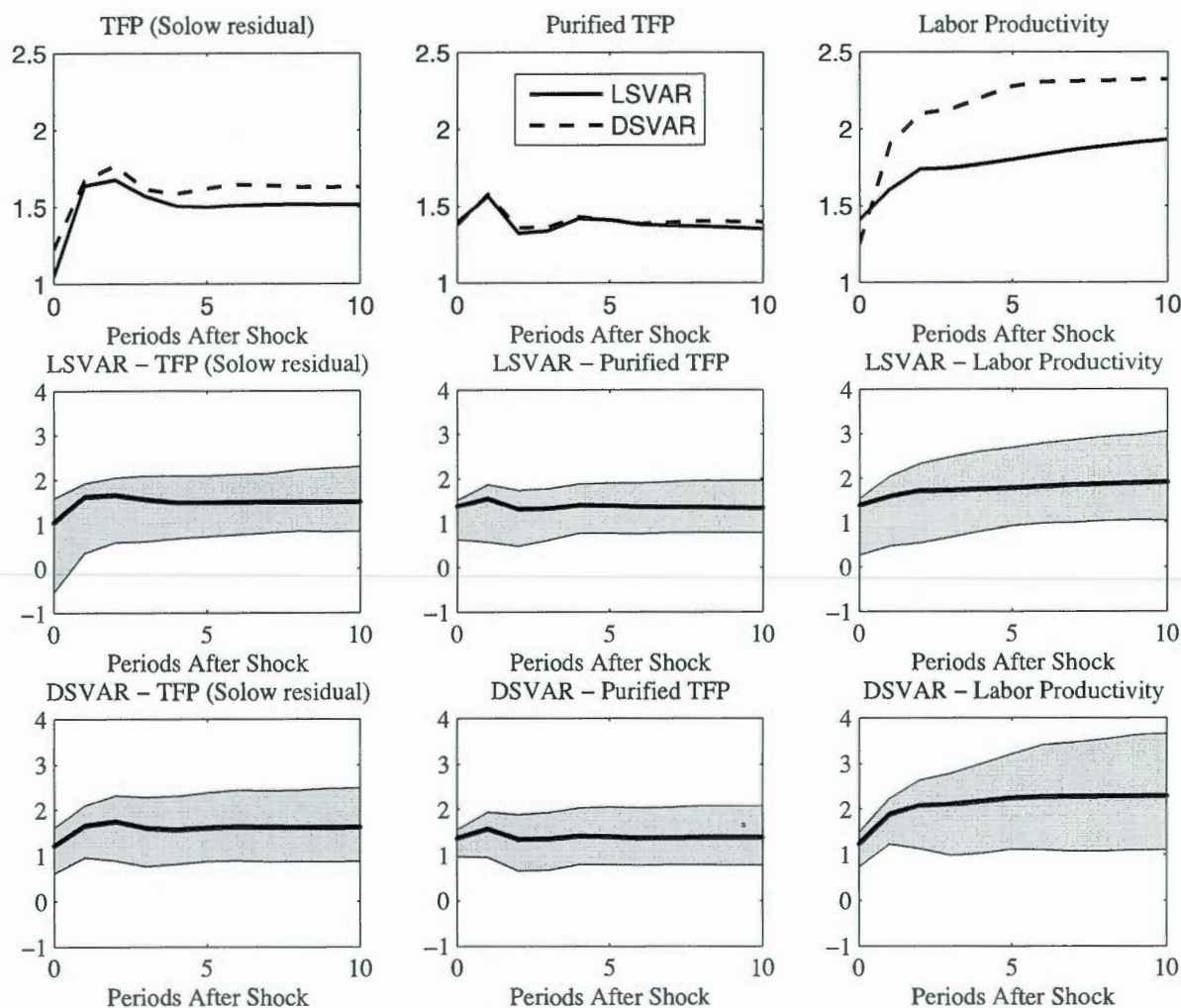


Notes : Le côté gauche du graphique présente les différentes mesures de productivité. La ligne pleine représente le résidu de Solow, la ligne en tirets la mesure de la TFP "purifiée" et la ligne en pointillés la productivité du travail. Toutes sont spécifiées en log et en première différence. Le côté droit présente le log des heures travaillées per capita. Les données sont à une fréquence annuelle et couvrent la période 1949-1996.





Figure A.3: IRFs des mesures de productivité suite à une amélioration technologique



**Notes :** Les modèle DSVAR et LSVAR incluent de façon alternative le taux de croissance du résidu de Solow, une mesure "purifiée" de la TFP et la productivité du travail. Le modèle LSVAR inclut en plus de façon alternative le log des heures en niveau. La période échantillonnale est 1949-1996. Deux retards sont inclus dans chaque modèle VAR. On sélectionne un horizon de 11 pour les IRFs. L'intervalle de confiance à 95% est obtenu à partir de la technique de bootstrap standard avec 1000 réplifications.

Figure A.4: IRF des heures

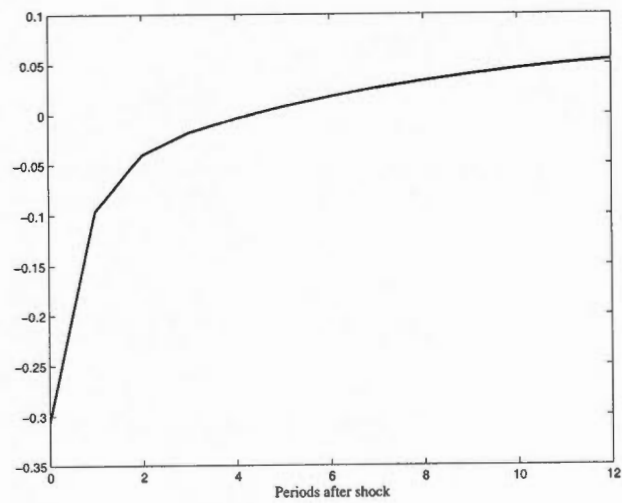


Figure A.5: ACFs

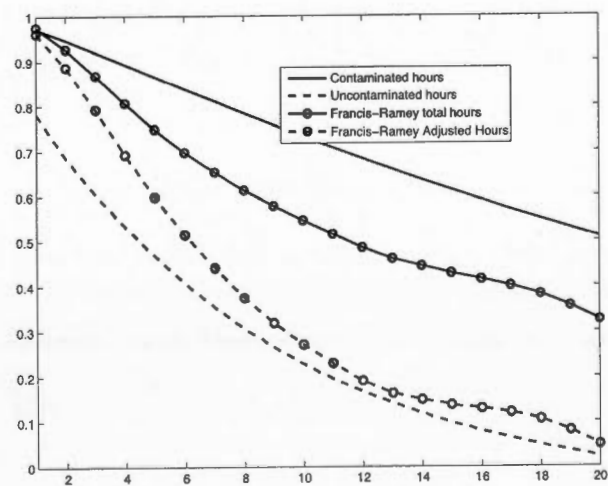
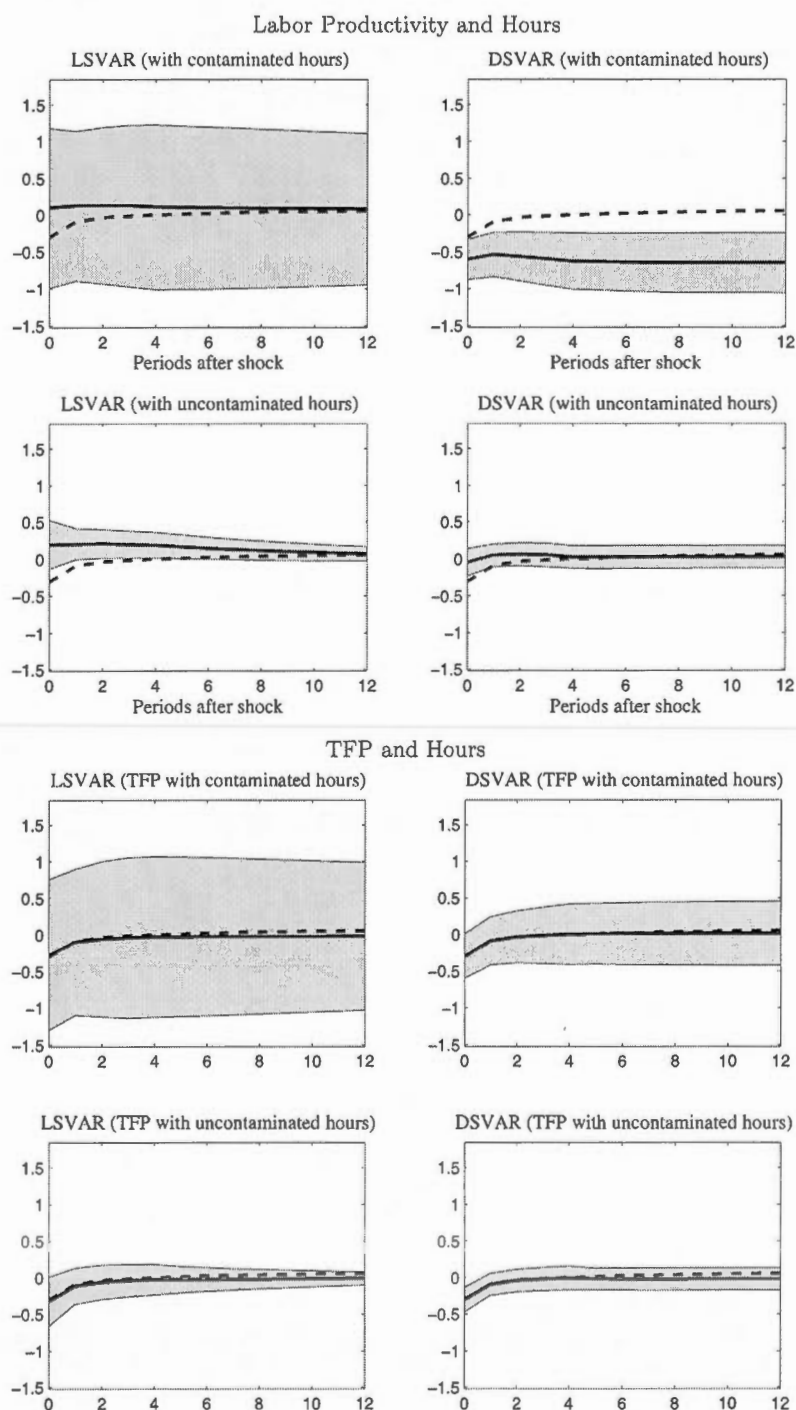
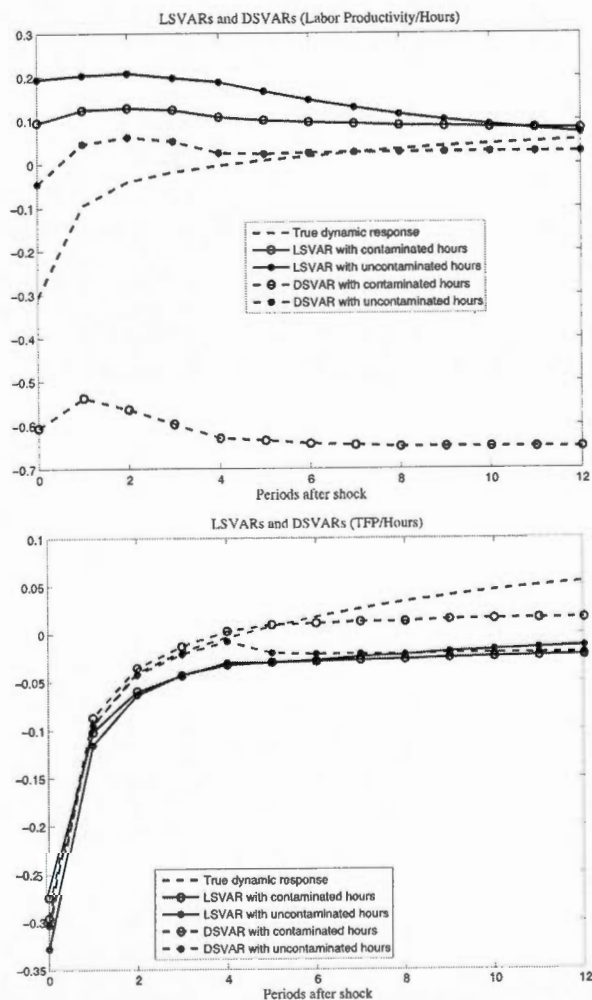


Figure A.6: IRFs des mesures de technologie suite à une amélioration technologique



Notes : Le modèle DSVAR inclut la croissance de la productivité du travail ou la croissance de la TFP et le log des heures (contaminées et non contaminées) en première différence. Le modèle LSVAR inclut la croissance de la productivité du travail ou la croissance de la TFP et le log des heures (contaminées et non contaminées). On sélectionne un horizon de 13 pour les IRFs. Le nombre de retards dans le modèle VAR est 4. L'intervalle de confiance à 95% est représenté.

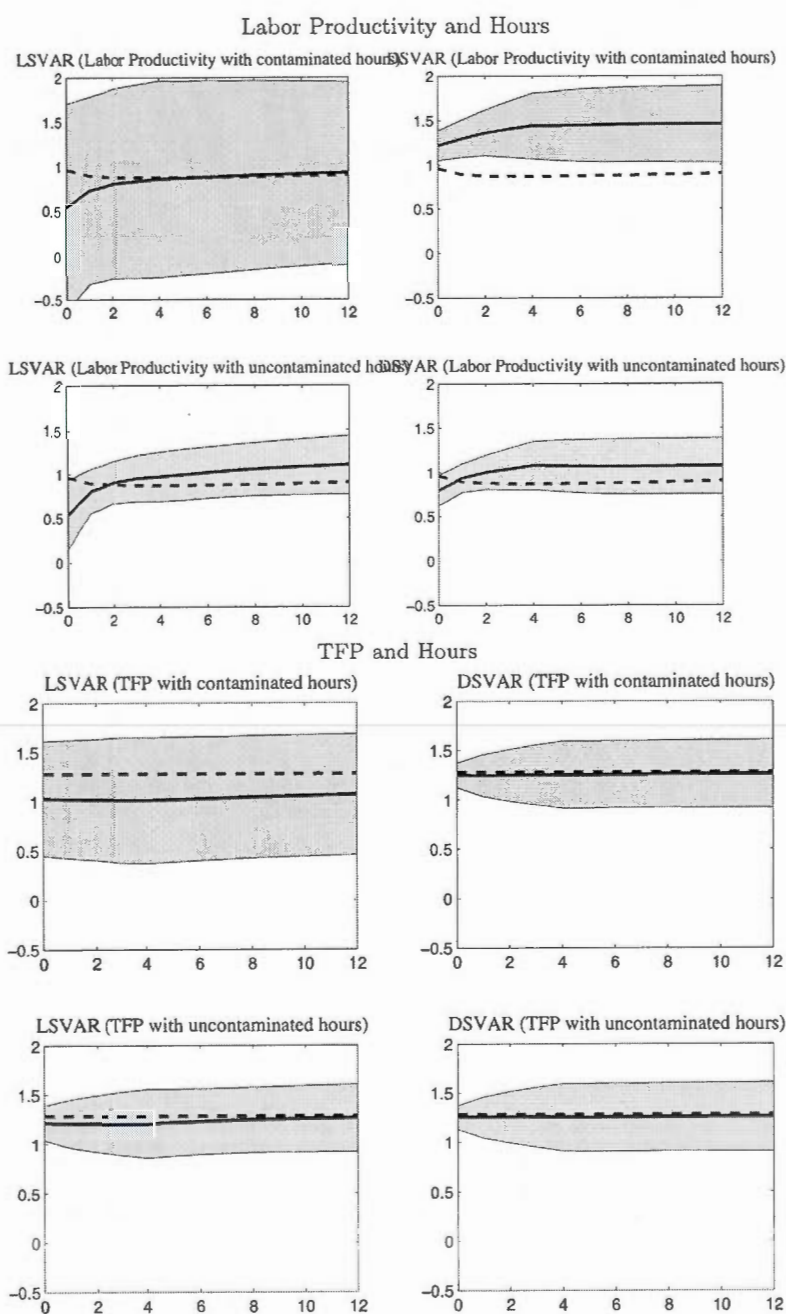
Figure A.7: IRFs des heures : Comparaisons des SVARs



Notes : Le modèle DSVAR inclut la croissance de la productivité ou la croissance de la TFP et le log des heures (contaminées et non contaminées) en première différence. Le modèle LSVAR inclut la croissance de la productivité du travail ou la croissance de la TFP et le log des heures (contaminées et non contaminées). On sélectionne un horizon de 13 pour les IRFs. Le nombre de retards dans le modèle VAR est 4.

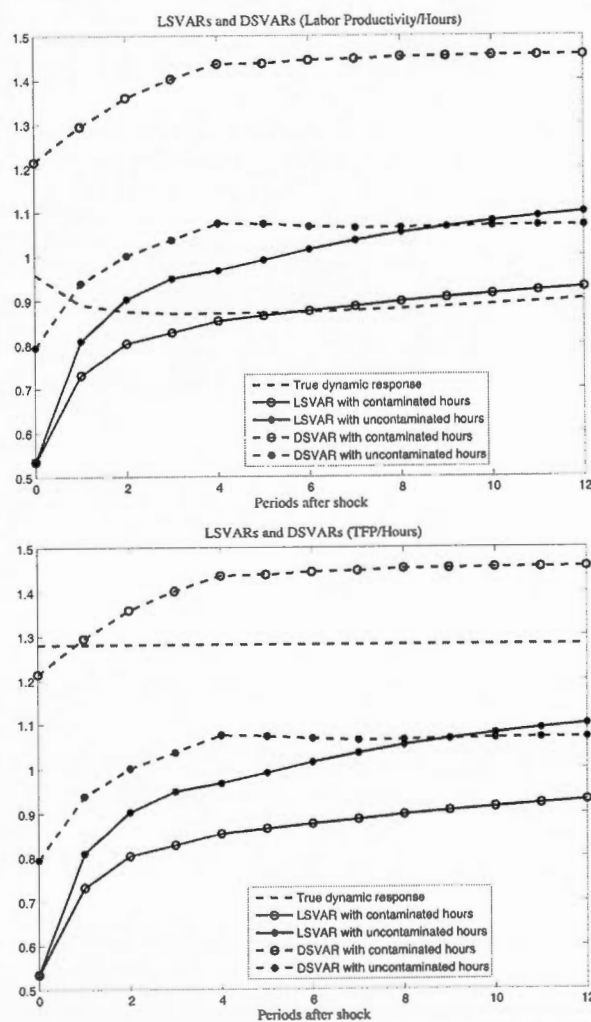


Figure A.8: IRF de la productivité



**Notes :** Le modèle DSVAR inclut la croissance de la productivité du travail et le log des heures (contaminées et non contaminées) en première différence. Le modèle LSVAR inclut la croissance de la productivité du travail et le log des heures (contaminées et non contaminées). On sélectionne un horizon de 13 pour les IRFS. Le nombre de retards dans le modèle VAR est 4. L'intervalle de confiance à 95% est représenté.

Figure A.9: IRF des mesures de productivité : comparaison des SVARs



**Notes :** Le modèle DSVAR inclut la croissance de la productivité ou la croissance de la TFP et le log des heures (contaminées et non contaminées) en première différence. Le modèle LSVAR inclut la croissance de la productivité du travail ou la croissance de la TFP et le log des heures (contaminées et non contaminées). On sélectionne un horizon de 13 pour les IRFs. Le nombre de retards dans le modèle VAR est 4.

## APPENDICE B

### SOLUTION LOG-LINÉAIRE DU MODÈLE

Les conditions d'équilibre et d'optimalité sont données par

$$\frac{1}{C_t} = \beta \left[ 1 - \delta + \theta \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \right] \frac{1}{C_{t+1}}$$

$$bH_t = (1 - \theta) \frac{Y_t}{C_t}$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + K_t^\theta (Z_t H_t)^{1-\theta} - C_t$$

$$\Delta \log(Z_t) = (\gamma_z - 1) + \sigma_z \epsilon_{z,t}.$$

Dans ce modèle, le choc de technologie  $Z_t$  inclut une tendance stochastique dans l'output, la consommation, l'investissement et le capital. Ainsi, pour obtenir un équilibre stationnaire, on doit enlever la tendance de ces variables comme suit

$$\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{Z_t}, \quad \tilde{c}_t = \frac{C_t}{Z_t}, \quad \tilde{i}_t = \frac{I_t}{Z_t}, \quad \tilde{k}_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{Z_t}.$$

Les conditions d'équilibre log-linéarisé autour de l'état stationnaire déterministe donnent

$$\hat{\tilde{k}}_{t+1} = \frac{(1 - \delta)}{\gamma_z} \left( \hat{\tilde{k}}_t - \sigma_z \eta_{zt} \right) + \frac{y}{k} \hat{\tilde{y}}_t - \frac{c}{k} \hat{\tilde{c}}_t \quad (\text{B.1})$$

$$\hat{h}_t = \hat{\tilde{y}}_t - \hat{\tilde{c}}_t \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{\tilde{y}}_t = \theta \left( \hat{\tilde{k}}_t - \sigma_z \eta_{zt} \right) + (1 - \theta) \hat{h}_t \quad (\text{B.3})$$

$$E_t \hat{\tilde{c}}_{t+1} = \hat{\tilde{c}}_t + \alpha \beta \frac{y}{k} E_t (\hat{\tilde{y}}_{t+1} - \hat{\tilde{k}}_{t+1} - \sigma_z \eta_{zt+1}), \quad (\text{B.4})$$

où  $y/k = (\gamma_z - \beta(1 - \delta))/(\theta\beta\gamma_z)$  et  $c/k = y/k - (\gamma_z + \delta - 1)/\gamma_z$ . Après substitution de (B.2) dans (B.3), on obtient

$$\hat{\tilde{y}}_t + \hat{\tilde{k}}_t = -\sigma_z \eta_{zt} - \frac{1 - \theta}{\theta} \hat{\tilde{c}}_t.$$

Maintenant, en utilisant l'expression au-dessus, les équations (B.1) et (B.4) se réécrivent

$$E_t \hat{c}_{t+1} = \psi \hat{c}_t \text{ avec } \psi = \frac{\theta \gamma_z}{\gamma_z - \beta(1-\theta)(1-\delta)} \in (0, 1) \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{k}_{t+1} = \nu_1 \hat{k}_t - \nu_1 \sigma_z \eta_{zt} - \nu_2 \hat{c}_t \quad (\text{B.6})$$

$$\text{avec } \nu_1 = \frac{1}{\beta \psi} > 1 \text{ et } \nu_2 = \frac{\gamma_z(1-\beta\theta^2) - \beta(1-\delta)(1-\theta^2)}{\theta^2 \beta \gamma_z}. \quad (\text{B.7})$$

Comme  $\nu_1 > 1$ , (B.7) doit être résolue en itérant en avant

$$\hat{k}_t = \sigma_z \eta_{zt} + \left( \frac{\nu_2}{\nu_1} \right) \lim_{T \rightarrow \infty} E_t \sum_{i=0}^T \left( \frac{1}{\nu_1} \right)^i \hat{c}_{t+i} + \lim_{T \rightarrow \infty} E_t \left( \frac{1}{\nu_1} \right)^T \hat{k}_{t+T}.$$

En excluant les sentiers explosifs, i.e.,  $\lim_{T \rightarrow \infty} E_t (1/\nu_1)^T \hat{k}_{t+T} = 0$ , et en utilisant (B.5), on obtient la règle de décision sur la consommation

$$\hat{c}_t = \left( \frac{\nu_1 - \psi}{\nu_2} \right) (\hat{k}_t - \sigma_z \eta_{zt}). \quad (\text{B.8})$$

Après substitution de (B.8) dans (B.7), la dynamique du capital est donnée par :

$$\hat{k}_{t+1} = \psi (\hat{k}_t - \sigma_z \eta_{zt}). \quad (\text{B.9})$$

La propriété de persistance du modèle est donc gouvernée par le modèle  $\psi \in (0, 1)$ , ce qui correspond à la racine stable de la version log linéaire du modèle. La règle de décision des autres variables (sans tendances) sont similaires à l'équation (B.8). Les heures travaillées sont données par

$$\begin{aligned} \hat{h}_t &= \hat{y}_t - \hat{c}_t \\ &= -\nu (\hat{k}_t - \sigma_z \eta_{zt}) \\ &= -\nu \left( -\frac{\psi}{1-\psi L} \sigma_z \epsilon_{z,t-1} - \sigma_{zt} \right) \\ &= \nu \left( \frac{\sigma_z \eta_{zt}}{1-\psi L} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

où  $\nu = \alpha(\nu_1 - \psi - \theta \nu_2)/(\theta \nu_2)$  est un paramètre positif. La dernière expression montre que les heures travaillées (ou le ratio de la consommation sur l'output) suivent exactement le même processus stochastique (un processus autorégressif d'ordre 1) comme le capital sans tendance  $\log(K_t/Z_{t-1})$  dans l'équation (B.9).

En utilisant l'expression pour le taux de croissance de l'output

$$\Delta y_t = \hat{y}_t - \hat{y}_{t-1} + \sigma_z \eta_{zt},$$

où l'on déduit

$$\Delta y_t = \sigma_z \eta_{zt} - \mu \frac{\sigma_z \Delta \eta_{zt}}{1 - \psi \bar{L}}, \quad (\text{B.11})$$

où  $\mu = 1 - (1 - \theta)(\nu_1 - \psi)/(\alpha \nu_2)$ .



## APPENDICE C

### PREUVES

**Lemme 1** *Sous l'hypothèse que  $\sum_{i=0}^{\infty} i |a_{kj}^{(i)}| < \infty$  pour  $k, j = 1, 2$  et que  $\{\eta_t\}$  est une séquence de choc structurels i.i.d. à deux dimensions avec une moyenne nulle, un quatrième moment fini et  $E(\eta_t \eta_t') = I_2$ , on obtient par la proposition 18.1 dans Hamilton (1994, p. 548)*

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \left( c \sum_{i=2}^t \eta_{2i-1} \right) \eta_{1t} &\xrightarrow{L} c \int_0^1 W_2(r) dW_1(r) \\ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \left( c \sum_{i=2}^t \eta_{2i-1} \right) \eta_{2t} &\xrightarrow{L} c \int_0^1 W_2(r) dW_2(r) \\ \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=2}^T a_{kj}(L) \eta_{j,t-1} \eta_{1t} &\xrightarrow{L} \mathcal{N} \left( 0, \sum_{i=0}^{\infty} \left( a_{kj}^{(i)} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

où  $W_1(r)$  et  $W_2(r)$  sont deux mouvements browniens standardisés indépendants  $l = 1, 2$ .

#### C.1 Preuve du théorème 1

Commençons par donner la variance asymptotique de  $X_{2t}$  avec  $c > 0$  et  $c = 0$ . Pour le cas où  $c > 0$ , on peut montrer que

$$\psi_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2t-1} X_{2t-1} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{22}^2 + \sum_{i=0}^{\infty} a_{22}^2 + a_{22}(1)^2 c^2,$$

qui dépend du paramètre  $c$ . On définit aussi  $\psi_{2,0}$  comme la variance asymptotique de  $X_{2t}$  mais avec  $c = 0$ .

Sous le modèle structurel (1.3) et (1.4), le numérateur de l'estimateur des VI de  $b_{12}^{(0)}$  est

donné par<sup>1</sup>

$$\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2t-1} \eta_{1t} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \left( a_{21}(L) \eta_{1t-1} + a_{22}(1) \frac{c}{\sqrt{T}} \sum_{j=2}^t \eta_{2j-1} + \tilde{a}_{22,T}^*(L) \eta_{2t-1} \right) \eta_{1t},$$

où la somme partielle vérifie

$$a_{22}(1) \frac{c}{T^{1+1/2}} \sum_{t=2}^T \underbrace{\left( \sum_{j=2}^t \eta_{2j-1} \right)}_{O_p(T)} \eta_{1t} \xrightarrow{p} 0.$$

De façon asymptotique  $\tilde{a}_{22,T}^*(L) = a_{22}(L)$  et par le lemme 1 ceci donne

$$\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T a_{21}(L) \eta_{1t-1} \eta_{1t} \xrightarrow{p} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \tilde{a}_{22}^*(L) \eta_{2,t-1} \eta_{1t} \xrightarrow{p} 0,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \eta_{1t} \xrightarrow{p} 0. \quad (\text{C.1})$$

Examinons maintenant le dénominateur. En inversant les équations (1.15) et (1.16) en utilisant

$B_0^{-1} = A_0$ , on obtient

$$\Delta \tilde{X}_{1t} = a_{12}^{(0)} b_{22}^* \tilde{X}_{2t-1} + a_{11}^{(0)} \eta_{1t} + a_{12}^{(0)} \eta_{2t} \quad (\text{C.2})$$

$$\Delta \tilde{X}_{2t} = a_{22}^{(0)} b_{22}^* \tilde{X}_{2,t-1} + a_{21}^{(0)} \eta_{1t} + a_{22}^{(0)} \eta_{2t}. \quad (\text{C.3})$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \tilde{\Delta} X_{2t} &= \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \Delta \tilde{X}_{2t} \\ &= \frac{1}{T} X_{2,t-1} \left( a_{22}^{(0)} b_{22}^* \tilde{X}_{2,t-1} + a_{21}^{(0)} \eta_{2t} \right) \xrightarrow{p} a_{22}^{(0)} b_{22}^* \tilde{\psi}_2, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

où  $\tilde{\psi}_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \tilde{X}_{2,t-1} \tilde{X}_{2,t-1}$ . Puisque  $X_{2t}$  est stationnaire du second ordre de façon asymptotique et  $\tilde{\psi}_2 \leq \psi_2$  par la propriété de projection  $\tilde{\psi}_2$  est bornée. En combinant (C.1) et (C.4), on obtient le résultat que  $\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)} 0$ .

---

1. Pour simplifier, on suppose ici que les valeurs initiales sont nulles.

Maintenant on établit la convergence en distribution de  $b_{12}^{(0)}$ . Ainsi

$$\sqrt{T} \left( \hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)} \right) = \sqrt{T} \left[ \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \eta_{1t}}{\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \Delta \tilde{X}_{2t}} \right].$$

Pour le numérateur

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \eta_{1t} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=2}^T \left[ a_{21}(L) \eta_{1,t-1} + a_{22}(1) \frac{c}{\sqrt{T}} \sum_{j=2}^t \eta_{2,j-1} + \tilde{a}_{22,T}^*(L) \eta_{2,t-1} \right] \eta_{1t}.$$

En utilisant le lemme 1, l'équation (C.4) et en notant que  $\tilde{a}_{22,T}^*(L) \rightarrow a_{22}(L)$ , on déduit que

$$\sqrt{T} \left( \hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)} \right) \xrightarrow{L} \frac{1}{a_{22}^{(0)} b_{22}^* \psi_2} \left[ a_{22}(1) c \int_0^1 W_2(r) dW_1(r) + \psi_{2,0}^{1/2} \xi_1 \right],$$

où  $\xi_1$  est la distribution normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Considérons maintenant l'estimateur  $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t x_t' \right]^{-1} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t \Delta X_{2t} \right] = \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t x_t' \right]^{-1} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t (x_t' \beta + \eta_{2t}) \right].$$

Cela donne

$$\hat{\beta} - \beta = \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t x_t' \right]^{-1} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t \eta_{2t} \right],$$

où de façon plus explicite

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t x_t' &= \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{X}_{1t} \left[ \eta_{1t} - (\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \Delta \tilde{X}_{2t} \right] & \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \tilde{X}_{2,t-1} \left[ \eta_{1t} - (\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \Delta \tilde{X}_{2t} \right] \\ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T x_{2,t-1} \Delta \tilde{X}_{1t} & \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \tilde{X}_{2,t-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{11,T} & G_{12,T} \\ G_{21,T} & G_{22,T} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T z_t \eta_{2t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \left[ \eta_{1t} - (\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \Delta \tilde{X}_{2t} \right] \eta_{2t} \\ \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \eta_{2t} \end{bmatrix}. \quad (C.5)$$

Examinons maintenant le premier terme  $G_{11,T}$ ,

$$G_{11,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{X}_{1t} \eta_{1t} - (\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{X}_{1t} \Delta \tilde{X}_{2t} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{X}_{1t} \eta_{1t} + o_p(1),$$

puisque  $(\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \xrightarrow{p} 0$  et  $\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{X}_{1t} \Delta \tilde{X}_{2t} = O_p(1)$ . En utilisant l'équation (C.2), cela donne  $\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{X}_{1t} \eta_{1t} \xrightarrow{p} a_{11}^{(0)}$  ce qui implique  $G_{11,T} \xrightarrow{p} a_{11}^{(0)}$ . Le terme  $G_{12,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \Delta \tilde{X}_{1t} \xrightarrow{p} a_{12}^{(0)} b_{22}^* \tilde{\psi}_2$  en utilisant l'équation (C.2). Pour le terme dans le coin à droite, on obtient

$$G_{12,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \tilde{X}_{2,t-1} [\eta_{1t} - (\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \Delta \tilde{X}_{2t}] = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \tilde{X}_{2,t-1} \eta_{1t} + o_p(1),$$

et  $\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \tilde{X}_{2,t-1} \eta_{1t} \eta_{1t} \xrightarrow{p} 0$  par l'équation (C.1). Finalement,  $G_{22,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \tilde{X}_{2,t-1} \xrightarrow{p} \tilde{\psi}_2$ .

Examinons maintenant l'expression (C.5). On a les résultats suivants  $\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \eta_{1t} \eta_{2t} \xrightarrow{p} 0$ ,  $(\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{X}_{2t} \eta_{2t} \xrightarrow{p} 0$  et  $\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \eta_{2t} \xrightarrow{p} 0$ . On peut maintenant conclure que  $\hat{\beta} - \beta \xrightarrow{p} 0$ .

Pour établir la convergence en distribution de  $b_{12}^{(0)}$  et  $b_{22}^*$ , on utilise l'expression suivante

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{b}_{21}^{(0)} - b_{21}^{(0)} \\ \hat{b}_{22}^* - b_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{G_{11,T} G_{22,T} - G_{21,T} G_{12,T}} \begin{bmatrix} G_{22,T} & -G_{12,T} \\ -G_{21,T} & G_{11,T} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=2}^T [\eta_{1t} - (\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \Delta \tilde{X}_{2t}] \eta_{2t} \\ \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \eta_{2t} \end{bmatrix}. \quad (C.6)$$

Maintenant on examine le premier terme du côté droit de l'équation de (C.6). Des résultats dérivés plus haut, on obtient  $G_{11,T} G_{22,T} \xrightarrow{p} a_{11}^{(0)} \tilde{\psi}_2$  et  $G_{21,T} G_{12,T} \xrightarrow{p} 0$ . Pour le terme de (C.6), on a  $\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=2}^T \eta_{1t} \eta_{2t} \xrightarrow{L} \xi_2$  où  $\xi_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et

$$\sqrt{T} (\hat{b}_{12}^{(0)} - b_{12}^{(0)}) \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{X}_{2t} \eta_{2t} \xrightarrow{L} \frac{\psi_{2,0}^{1/2}}{b_{22}^* \tilde{\psi}_2} \xi_1 + \frac{\nu_1}{b_{22}^* \tilde{\psi}_2},$$

puisque  $\frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \Delta \tilde{X}_{2t} \eta_{2t} \xrightarrow{p} a_{22}^{(0)}$  avec  $\vartheta_1 = a_{22}(1)c \int_0^1 W_2(r) dW_1(r)$  dérivé au dessus.

Maintenant pour l'expression  $\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \eta_{2t}$ ,

$$\frac{\sqrt{T}}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \eta_{2t} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \sqrt{T} \left[ a_{21}(L) \eta_{1,t-1} + a_{22}(1) \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{T}} \sum_{j=2}^t \eta_{2,j-1} + \tilde{a}_{22,T}^*(L) \eta_{2,t-1} \right] \eta_{2t}.$$

En utilisant le lemme 1,

$$\frac{\sqrt{T}}{T} \sum_{t=2}^T X_{2,t-1} \eta_{2t} \xrightarrow{L} \left[ a_{22}(1)c \int_0^1 W_2(r) dW_2(r) + \psi_{2,0}^{1/2} \xi_2 \right].$$

En collectant ces résultats, on obtient que

$$\sqrt{T} \left( \hat{b}_{21} - b_{21}^{(0)} \right) \xrightarrow{L} \frac{\xi_2}{a_{11}^{(0)}} - \frac{\psi_{2,0}^{1/2}}{a_{11}^{(0)} b_{22}^* \tilde{\psi}_2} \xi_1 - \frac{\vartheta_1}{a_{11}^{(0)} b_{22}^* \tilde{\psi}_2}.$$

Maintenant pour  $\hat{b}_{22}^*$ , on obtient

$$\sqrt{T} \left( \hat{b}_{22}^* - b_{22}^* \right) \xrightarrow{L} \frac{a_{12}^{(0)} \psi_{2,0}^{1/2}}{a_{11}^{(0)} \tilde{\psi}_2} \xi_1 + \frac{a_{12}^{(0)} \vartheta_1}{a_{11}^{(0)} \tilde{\psi}_2} - \left[ \frac{a_{12}^{(0)} b_{22}^*}{a_{11}^{(0)}} - \frac{\psi_{2,0}^{1/2}}{\tilde{\psi}_2} \right] \xi_2 + \frac{\vartheta_2}{\tilde{\psi}_2},$$

où  $\vartheta_2 = a_{22}(1)c \int_0^1 W_2(r) dW_2$ .

## C.2 Preuve de la proposition 1

Selon la représentation structurelle (1.4), la mesure en échantillon fini de l'impact de long terme est donnée par :

$$A_T(1) = \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{12}(1)c/\sqrt{T} \\ 0 & a_{22}(1)c/\sqrt{T} \end{bmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas triangulaire par le bas comme imposé dans la procédure d'identification du SVAR. La matrice de covariance de long terme est alors

$$A_T(1)A_T(1)' = \begin{bmatrix} a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T & a_{12}(1)a_{22}(1)c^2/T \\ a_{12}(1)a_{22}(1)c^2/T & a_{22}(1)^2 c^2/T \end{bmatrix}. \quad (C.7)$$

Maintenant, on impose faussement une forme triangulaire par le bas en utilisant une décomposition de Choleski sur (C.7). On peut donc réécrire l'expression du dessus en utilisant l'équation (4.4.12) dans Hamilton (1994, p.90) comme

$$A_T(1)A_T(1)' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{12}(1)a_{22}(1)c^2/T}{a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T & 0 \\ 0 & a_{22}(1)^2 c^2/T - \frac{a_{12}(1)^2 a_{22}(1)^2 c^4/T^2}{a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T} \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}(1)a_{22}(1)c^2/T}{a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Par une décomposition de Choleski de  $A_T(1)A_T(1)'$  on obtient une matrice triangulaire par le bas :

$$\text{chol} (A_T(1)A_T(1)') = \begin{bmatrix} (a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T)^{1/2} & 0 \\ \frac{a_{12}(1)a_{22}(1)c^2/T}{(a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T)^{1/2}} & \left( a_{22}(1)^2 c^2/T - \frac{a_{12}(1)^2 a_{22}(1)^2 c^4/T^2}{a_{11}(1)^2 + a_{12}(1)^2 c^2/T} \right)^{1/2} \end{bmatrix}.$$



## CHAPITRE II

### COMPARAISON DE MODÈLES CALIBRÉS MAL SPÉCIFIÉS : UNE APPROCHE PAR L'INFÉRENCE INDIRECTE

#### 2.1 Introduction

Aujourd'hui les modèles dynamiques stochastiques d'équilibre général (DSGE) sont l'outil de base de la nouvelle macroéconomie, avec pour ambition de fournir des microfondements structurels à la macroéconomie. La plupart des macroéconomistes utilisent la calibration pour leur modèle, puisque comme le soulignent Dridi, Guay et Renault (2007), personne ne croit que les modèles DSGE représentent une description réaliste du processus économique. En effet, pour ces macroéconomistes les erreurs de spécifications sont suffisamment grandes pour rendre les estimations et les tests sans valeur. Cependant croire cela, c'est se tromper sur l'économétrie puisque que comme le soulignent Kim et Pagan (1995), les économètres ne travaillent jamais sous l'hypothèse que le modèle est le vrai. De plus les calibrationnistes s'intéressent avant tout à savoir lequel des modèles en compétition s'ajuste le mieux aux données.

Comme le souligne Guay (2009) la théorie économique donne rarement une structure de probabilité complète pour les variables d'intérêt. Ainsi comme le modèle économique ne décrit pas une distribution complètement paramétrique, le modèle est dit partiellement paramétrique. Dans ce cadre, des estimateurs convergents, des paramètres d'intérêts peuvent être obtenus par la méthode des moments généralisés (GMM, Hansen (1982)) en choisissant des conditions de moments appropriées (Andrews (1999)) lorsqu'une estimation directe est possible. Cependant, la complexité des modèles (forte non linéarité, ou modèle structurel dynamique) ne permet pas

les estimations directes. On doit donc avoir recours à l'utilisation de méthodes d'estimation basées sur les simulations (Gouriéroux, Monfort et Renault (1993) et Gouriéroux et Monfort (1997)). L'utilisation de simulations pour l'estimation va donc amplifier le problème de mauvaise spécification, puisque le modèle est utilisé pour simuler les sentiers. Le problème est donc que d'un côté, on a besoin d'un modèle complètement paramétrique pour simuler des sentiers concordants, mais d'un autre côté, cette spécification complètement paramétrique a de fortes chances d'être mal spécifiée et ainsi de donner de faux simulateurs. Dans ce cas là, la seule façon d'obtenir des estimateurs robustes et d'évaluer le modèle malgré sa mauvaise spécification, consiste à analyser le modèle structurel à l'aide d'un modèle instrumental parcimonieux, lequel habituellement ne prend pas en compte ce qui va mal dans les sentiers simulés. C'est le point que soulignent Dridi, Guay et Renault (2007), lorsqu'ils disent que si l'on veut procéder sous l'hypothèse que le modèle n'est pas bien spécifié, on doit être parcimonieux par rapport aux nombres de moments à reproduire.

Dans cet article, on propose une procédure en deux étapes pour discriminer deux modèles mal spécifiés. Cette méthode en deux étapes nous permet d'obtenir des estimateurs convergents vers des paramètres structurels (en utilisant seulement les faits stylisés pour lesquels les modèles font bien), et donc cela permet que la deuxième étape (l'étape de discrimination des modèles) ne soit pas contaminée par une mauvaise estimation. En effet, cela permet d'estimer les paramètres de nos modèles sur des faits stylisés différents, et ensuite de les comparer sur le même ensemble de faits stylisés. De plus, le cadre est développé pour des méthodes d'estimations par simulation. Là encore cela représente un avantage puisqu'en utilisant une méthode d'estimation par simulation, on peut corriger le biais de petits échantillons, notamment dans notre deuxième étape, lorsque l'on utilise les coefficients estimés d'un modèle vectoriel autorégressif.

On considère donc l'estimation par inférence indirecte comme une approche rigoureuse de la calibration. On compare ensuite les deux modèles à l'aide d'un test asymptotique. Sous l'hypothèse nulle, les deux modèles sont mal spécifiés et donnent une approximation équivalente des données. Notre approche est reliée de près à Vuong (1989), Rivers et Vuong (2002), et Hnatkovska, Marmer et Tang (2012). Vuong (1989) a proposé ce genre de test dans le cadre du maximum de vraisemblance ; Rivers et Vuong (2002) ont généralisé le test pour permettre

l'utilisation de modèles paramétrés de façon incomplète, l'utilisation d'un plus grand nombre de méthodes d'estimation (e.g., GMM), ainsi que l'application aux modèles stochastiques non linéaires possiblement mal spécifiés. Hnatkovska, Marmer et Tang (2012) quant à eux, élargissent le cadre d'utilisation du test au cas où les modèles sont imbriqués ou non imbriqués, ainsi que sur la question du choix des poids pour les caractéristiques de la forme réduite lorsque l'on compare les modèles. Ceci est relié de près à l'hypothèse d'englobement, ce choix parcimonieux signifie que le modèle structurel bien que mal spécifié englobe le modèle instrumental.

La contribution de notre article par rapport à Hnatkovska, Marmer et Tang (2012) est comme suit. Premièrement Hnatkovska, Marmer et Tang (2012) utilisent dans leur première étape un estimateur de distance minimale classique pour calibrer les paramètres du modèle ; dans notre cas on utilise une méthode d'inférence indirecte (ce qui est un cas spécifique de la méthode d'inférence indirecte séquentielle partielle de Dridi, Guay et Renault (2007)). Ainsi comme le soulignent Dridi, Guay et Renault (2007), cette méthode a comme atout de prendre les avantages de l'approche inférentielle (estimation, intervalle de confiance et test de spécification) ainsi que les avantages de l'approche calibrationniste. Ceci permet de ne pas avoir à faire l'hypothèse très forte faite par Hnatkovska, Marmer et Tang (2012), sur la convergence de leurs estimateurs. En effet avec la méthode d'inférence indirecte, et la condition d'englobement, on est assuré de la convergence de nos estimateurs. Deuxièmement dans leur étape d'estimation Hnatkovska, Marmer et Tang (2012) utilisent le même vecteur de paramètres instrumentaux pour les deux modèles. Or cette hypothèse est très restrictive, puisque si l'on veut utiliser les CPOs comme conditions de moments, il est très peu probable que les deux modèles donnent les mêmes CPOs.

Le test que l'on développe, est un test qui s'effectue aussi en deux étapes. Dans notre première étape on utilise comme procédure d'estimation une méthode d'inférence indirecte telle que développée par Dridi, Guay et Renault (2007). Cependant dans notre estimation on suppose que les deux modèles sont estimés à partir de deux vecteurs de paramètres instrumentaux différents. Dans la deuxième étape on effectue la vérification du modèle, en évaluant sa capacité à reproduire certains moments d'intérêts.

La méthode va donc consister à tester le modèle structurel de façon empirique en mesurant sa capacité à reproduire certains faits stylisés d'intérêts.

Dans cet article, nous allons donc développer une méthode en deux étapes pour comparer des modèles mal spécifiés à l'aide d'un test asymptotique. Dans ce test, sous l'hypothèse nulle les deux modèles sont mal spécifiés et fournissent une approximation équivalente pour les données. Notre approche est principalement reliée aux travaux de Vuong (1989) et Rivers et Vuong (2002) et Hnatkovska, Marmer et Tang (2012).

Le principal résultat que l'on obtient est que la distribution asymptotique du test (obtenue à la deuxième étape) est normale, pour le cas où les modèles sont imbriqués ou non imbriqués (un résultat similaire à ce qu'obtiennent Hnatkovska, Marmer et Tang (2012)). De plus le fait d'utiliser une approche séquentielle de l'inférence indirecte partielle, permet de concilier non seulement l'étape de calibration mais aussi l'étape de vérification.

Dans le but d'appliquer notre test, on compare deux modèles RBC. Le premier est le modèle de Burnside et Eichenbaum (1996) qui est une évolution du modèle à rétention de main d'œuvre de Burnside, Eichenbaum et Rebelo (1993). En effet, c'est une version modifiée qui permet une utilisation variable du capital, tout en gardant la possibilité de rétention de la main d'œuvre. Le deuxième modèle, est le modèle de Ambler, Guay et Phaneuf (2012) qui est un modèle comportant des coûts d'ajustement du travail et des contrats de salaire échelonnés. On juge la qualité des modèles dans leurs capacités à reproduire la dynamique des cycles réels aux États-Unis. Ces deux modèles ont pour but d'amplifier les mécanismes de propagation dans les RBC, dans le but de reproduire (entre autre) l'autocorrélation du taux de croissance de l'output. Le premier introduit l'utilisation variable du capital et la rétention de la main d'œuvre, alors que le deuxième utilise le coût d'ajustement du travail et des contrats de salaire échelonnés. On évalue les modèles sur leurs capacités à reproduire la dynamique complète du taux de croissance de l'output ainsi que des heures travaillées tels que représentés par un modèle autorégressif vectoriel (VAR) comportant 4 retards. On trouve que l'hypothèse nulle selon laquelle les deux modèles ont la même capacité d'ajustement est rejetée en faveur de l'hypothèse selon laquelle le modèle de Ambler, Guay et Phaneuf (2012) s'ajuste mieux aux données US. On conclut donc

que les frictions introduites dans le modèle prennent en compte la dynamique complète (tel que représenté par le VAR) de la croissance de l'output et des heures travaillées.

L'article est organisé comme suit. La deuxième section présente le cadre du test. La troisième section présente les conditions nécessaires pour une estimation convergente des paramètres. La quatrième section présente la dérivation de la distribution de l'estimateur de la première étape. Dans la cinquième section on présente notre test pour la comparaison de deux modèles en se basant sur une statistique de quasi-maximum de vraisemblance. Dans la sixième section on dérive la distribution de la statistique suggérée dans le cas où les modèles sont imbriqués, strictement non imbriqués et se chevauchent. Dans la septième section on applique notre test sur les deux modèles RBC. Et la dernière section conclut.

## 2.2 Inférence indirecte dans un cadre semi-paramétrique

On présente dans cette section le principe d'inférence indirecte tel que décrit dans Dridi, Guay et Renault (2007). Les données sont constituées des observations du processus stochastique  $\{y_t, t \in Z\}$  pour  $t = 1, \dots, T$ . On note par  $P_0$  la vraie p.d.f inconnue de  $\{y_t, t \in Z\}$ .

### Hypothèse (A1).

- (i)  $P_0$  appartient à une famille de p.d.f  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{H}^Z$ .
- (ii)  $\tilde{\theta}_1$  est une application de  $\mathcal{P}$  surjective sur une partie  $\Theta_1 = \tilde{\theta}_1(\mathcal{P})$  de  $\mathbb{R}^{p_1}$ .
- (iii)  $\tilde{\theta}_1(P_0) = \theta_1^0$ , la vraie valeur inconnue du paramètre d'intérêt, appartient à l'intérieur  $\Theta_1^0$  de  $\Theta_1$ .

$\tilde{\theta}(\mathcal{P}) = \theta_1$  est un vecteur de paramètre d'intérêt.

Dans le but d'obtenir un simulateur utile pour l'inférence indirecte (II) sur  $\theta_1$ , on plonge le modèle partiellement paramétrique défini par (A1) dans un modèle structurel qui est totalement paramétrique et mal spécifié en général puisqu'il introduit une hypothèse supplémentaire sur la loi de mouvement de  $y$ , laquelle n'est suggérée par aucune théorie économique. Cette hypothèse supplémentaire requiert un vecteur  $\theta_2$  de paramètre additionnel. Le vecteur  $\theta$  de



“paramètre structurel” est ainsi donné par  $\theta = (\theta'_1, \theta'_2)'$ . On formule alors une hypothèse nominale  $(M_\theta)$  pour spécifier un modèle structurel, même si on sait que  $(M_\theta)$  est probablement non convergent avec le vrai PGD .

**Hypothèse nominale  $(M_\theta)$ .**  $\{y_t, t \in Z\}$  est un processus stationnaire concordant avec le modèle non linéaire simultané suivant

$$r(y_t, y_{t-1}, u_t; \theta) = 0,$$

$$\phi(u_t, u_{t-1}, \epsilon_t; \theta) = 0$$

$$\theta = (\theta'_1, \theta'_2)' \in (\Theta_1 \times \Theta_2) = \Theta \text{ un ensemble compact de } \mathbb{R}^{p_1+p_2},$$

–  $\{\epsilon_t, t \in Z\}$  est un bruit blanc avec une distribution connue  $P_*$ .

Alors, pour chaque valeur donnée du paramètre  $\theta$ , il est possible de simuler des valeurs  $\{\tilde{y}_1(\theta, z_0), \dots, \tilde{y}_T(\theta, z_0)\}$  et pour des conditions initiales données  $z_0 = (y_0, u_0)$ . Ceci est fait en simulant les valeurs  $\{\tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_T\}$  de  $P_*$ .

De même on peut définir le modèle en concurrence  $M_\gamma$  défini comme

$$s(y_t, y_{t-1}, u_t; \gamma) = 0$$

$$v(u_t, u_{t-1}, \epsilon_t; \gamma) = 0$$

où  $\gamma = (\gamma'_1, \gamma'_2)' \in (\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \Gamma$  un ensemble compact de  $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ . Les variables  $y_t, u_t$  et  $\epsilon_t$  ont les mêmes caractéristiques que pour le modèle d'intérêt  $M_\theta$ .

Définissons le modèle instrumental (ou auxiliaire)  $\mathcal{N}_j$  lequel définit la pseudo-vraie valeur du paramètre instrumental comme la limite en probabilité d'un certain estimateur associé à la minimisation de la fonction  $Q_{j,T}(\underline{y}_T, \beta_j)$ . On suppose que  $\beta_j \in B_j$  est un ensemble compact  $\mathbb{R}^{q_j}$  et  $\underline{y}_T$ , dénote les valeurs retardées de  $y_t$  pour un nombre fixé de retards  $K$ . On définit

$$Q_{j,T}(\underline{y}_T, \beta_j) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_j(\underline{y}_t) - \beta_j \right]' \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_j(\underline{y}_t) - \beta_j \right] \quad (2.1)$$

où  $m_j(\underline{y}_t)$  sont les moments d'intérêts.

On définit l'estimateur  $\hat{\beta}_{j,T}$  de  $\beta_j$  comme

$$\hat{\beta}_{j,T} = \arg \min_{\beta_j \in B_j} Q_{j,T}(\underline{y}_T, \beta_j), \quad (2.2)$$

et sous les conditions habituelles de régularité on a  $P_0 \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\beta}_{j,T} = \beta_j(P_0) = \beta_j^0$ . Pour le processus simulé  $\{y_t^h(\theta, z_0)\}_{t=1}^T$ , l'estimateur du modèle instrumentale est défini par

$$\tilde{\beta}_{j,T}^h(\theta_1, \theta_2) = \arg \min_{\beta_j \in B_j} Q_{j,T}(\underline{y}_T^h(\theta, z_0^h), \beta_j), \quad (2.3)$$

où  $\underline{y}_T^h(\theta, z_0^h) = \{\tilde{y}_t^h(\theta, z_0^h), \tilde{y}_{t-1}^h(\theta, z_0^h), \dots, \tilde{y}_{t-K}^h(\theta, z_0^h)\}$  pour  $H$  sentiers simulés  $h = 1, \dots, H$ , associé à une valeur donnée  $\theta = (\theta'_1, \theta'_2)'$  des paramètres structurels. On définit également

$$\tilde{\beta}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \tilde{\beta}_{j,T}^h(\theta_1, \theta_2),$$

et sous les conditions habituelles de régularité, ceci définit ce que l'on appelle la binding fonction

$$\tilde{\beta}_j(\theta_1, \theta_2) = P \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2).$$

Pour le modèle  $M_\gamma$ , le modèle instrumental correspondant est  $\mathcal{N}_i$  lequel est caractérisé par

$$Q_{i,T}(\underline{y}_T, \beta_i) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_i(\underline{y}_t) - \beta_i \right]' \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_i(\underline{y}_t) - \beta_i \right] \quad (2.4)$$

où  $\beta_i \in B_i$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{q_i}$ . Les estimateurs  $\hat{\beta}_{i,T}$  et  $\tilde{\beta}_i(\gamma)$  sont obtenus comme dans les équations (2.2) et (2.3) sauf que l'on remplace  $j$  par  $i$  et  $\theta$  par  $\gamma$ .

**Hypothèse (A2).**  $\tilde{\beta}(\cdot, \cdot)$  est "on-to-one".

Selon la terminologie de Gouriéroux, Monfort et Renault (1993),  $\beta_j^0$  est la vraie valeur du paramètre instrumental et  $\tilde{\beta}_j(\cdot, \cdot)$  est la binding fonction du modèle structurel vers le modèle instrumental.

Des estimateurs II de  $\theta = (\theta'_1, \theta'_2)'$  et  $\gamma = (\gamma'_1, \gamma'_2)'$  peuvent être définis comme

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{TH} &= (\hat{\theta}'_{1,TH}, \hat{\theta}'_{2,TH})' = \arg \min_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2} \left[ \hat{\beta}_{j,T} - \tilde{\beta}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2) \right]' \hat{\Omega}_{j,T} \left[ \hat{\beta}_{j,T} - \tilde{\beta}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2) \right], \\ \hat{\gamma}_{TH} &= (\hat{\gamma}'_{1,TH}, \hat{\gamma}'_{2,TH})' = \arg \min_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2} \left[ \hat{\beta}_{i,T} - \tilde{\beta}_{i,TH}(\gamma_1, \gamma_2) \right]' \hat{\Omega}_{i,T} \left[ \hat{\beta}_{i,T} - \tilde{\beta}_{i,TH}(\gamma_1, \gamma_2) \right], \end{aligned}$$

où  $\Omega_{j,T}$  et  $\Omega_{i,T}$  sont des matrices symétriques aléatoires non négatives.

### 2.3 Estimation indirecte semi-paramétrique

Dans cette section on présente les principaux résultats nécessaires à la construction du test et à sa dérivation. Ces résultats proviennent de Dridi, Guay et Renault (2007).

#### 2.3.1 Convergence de l'estimateur semi-paramétrique d'inférence indirecte

Dans le but de dériver une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de  $\hat{\theta}_{1,TH}$  vers  $\theta_1^0$ , on définit ce que l'on appelle "l'inverse généralisé"  $\tilde{\beta}_j^-$  de  $\tilde{\beta}_j$  par

$$\tilde{\beta}_j^-(\beta_j) = \arg \min_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2} \left\| \beta_j - \tilde{\beta}_j(\theta_1, \theta_2) \right\|_{\Omega_j}. \quad (2.5)$$

Dans notre cadre semi-paramétrique, on s'intéresse seulement à la projection de  $\tilde{\beta}_j^-[ \beta_j(P) ]$  sur l'ensemble  $\Theta_1$  des paramètres d'intérêt. On note par  $Q_1$  l'opérateur de projection

$$\begin{aligned} Q_1 : \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} &\rightarrow \mathbb{R}^{p_1}, \\ (\theta'_1, \theta'_2)' &\rightarrow \theta_1. \end{aligned}$$

On peut alors énoncer le critère de convergence suivant

**Proposition 2** *Sous les hypothèses (A1)-(A2),  $\hat{\theta}_{1,TH}$  est un estimateur convergent du paramètre d'intérêts  $\theta_1^0$  si et seulement si, pour tout  $P$  dans la famille  $\mathcal{P}$  de p.d.f délimitée par le modèle (A1)*

$$Q_1 \left[ \tilde{\beta}_j^-(\beta_j(P)) \right] = \tilde{\theta}_1(P).$$

**Preuve.** Sous les hypothèses (A1)-(A2),  $\hat{\theta}_{1,TH}(P)$  est un estimateur convergent de  $\tilde{\theta}_1(P)$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathcal{P}, P_* \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{1,TH}(P) &= \theta_1^*(P) = \tilde{\theta}_1(P), \\ &= Q_1 \left[ \arg \min_{\theta \in \Theta} \left\| \beta_j(P) - \tilde{\beta}_j(\theta_1, \theta_2) \right\|_{\Omega_j} \right], \\ &= Q_1 \left[ \tilde{\beta}_j^-(\beta_j(P)) \right]. \end{aligned}$$

■

### 2.3.2 Une condition suffisante d'englobement pour la convergence

Mizon et Richard (1986), Gouriéroux et Monfort (1995) ont utilisé le concept de binding fonction pour définir une définition formelle du principe d'englobement. Ce principe implique les notions de pseudo-vraie valeur et de binding fonction lesquelles sont fondées sur le critère d'information de Kullback Leibler (KLIC) comme critère de proximité. La caractéristique spécifique de notre cadre d'analyse est que l'on considère un modèle paramétrique  $(M_\theta)$  qui est mal spécifié, mais introduit un vecteur de paramètre inconnu  $(\theta'_1, \theta'_2)'$  dont les  $p_1$  premières composantes correspondent à certains paramètres structurels bien spécifiés (selon (A1)). Ainsi, on se concentre ici sur les pseudos-vraies valeurs de  $(M_\theta)$  de la forme  $(\theta_1^{0'}, \bar{\theta}_2')'$  où  $\theta_1^0 = \tilde{\theta}_1(P_0)$  est la vraie valeur inconnue des paramètres d'intérêts. D'un autre côté l'équation (2.2) définit la pseudo-vraie valeur  $\beta_j^0$  du "modèle instrumental"  $(\mathcal{N}_j)$ . Ainsi la fonction binding  $\tilde{\beta}_j(\cdot, \cdot)$  est interprétée comme la fonction reliant  $(M_\theta)$  vers  $(\mathcal{N}_j)$ .

**Définition 1**  $(M_\theta)$  doté de la vraie valeur inconnue  $\theta_1^0$  englobe complètement  $(\mathcal{N}_j)$  si il existe  $\bar{\theta}_2 \in \Theta_2$  tel que

$$\beta_j^0 = \tilde{\beta}_j(\theta_1^0, \bar{\theta}_2). \quad (2.6)$$

Dans ce cadre on peut faire la proposition suivante

**Proposition 3** *Sous les hypothèses (A1)-(A2) et si  $(M_\theta)$  doté de la vraie valeur  $\theta_1^0$  englobe complètement  $(\mathcal{N}_j)$ , alors  $\hat{\theta}_{1,TH}$  est un estimateur convergent des paramètres d'intérêt  $\theta_1^0$ .*

**Preuve.** La proposition 3 est le corollaire direct de la proposition 2 puisque

$$\begin{aligned}\beta_j^0 &= \tilde{\beta}_j(\theta_1^0, \bar{\theta}_2), \\ \Rightarrow (\theta_1^{0'}, \bar{\theta}_2')' &= \arg \min_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2} \left\| \beta_j^0 - \tilde{\beta}_j(\theta_1, \theta_2) \right\|_{\Omega_j}, \\ &= \tilde{\beta}_j^-(\beta_j^0), \\ \Rightarrow \theta_1^0 &= Q_1 \left[ \tilde{\beta}_j^-(\beta_j^0) \right]\end{aligned}$$

ce qui correspond au critère de la proposition 2. ■

## 2.4 Modèle structurel mal spécifié et inférence indirecte

### 2.4.1 Distribution asymptotique de l'estimateur semi-paramétrique d'inférence indirecte

On considère ici les propriétés asymptotiques de l'estimateur d'inférence indirecte  $\hat{\theta}_{TH}$  (resp.  $\hat{\gamma}_{TH}$ ) sous l'hypothèse d'englobement total  $H_e$  selon la définition 1. De plus on suppose que les pseudo-vraies valeurs  $\theta_1^0$  (resp.  $\gamma_1^0$ ), et  $\bar{\theta}_2$  (resp.  $\bar{\gamma}_2$ ) utilisées pour la propriété d'englobement et la vraie valeur  $\beta_j^0$  (resp.  $\beta_i^0$ ) sont à l'intérieur de l'ensemble correspondant :  $(\theta_1^{0'}, \bar{\theta}_2')' \in \Theta^0$ ,  $\beta_j^0 \in \mathcal{B}_j^0$  (resp.  $(\gamma_1^{0'}, \gamma_2')' \in \Gamma^0$ ,  $\beta_i^0 \in \mathcal{B}_i^0$ ). On suppose de plus que

**Hypothèse (A3).**

$$\sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta} (\underline{y}_T, \beta^0) \sim \mathcal{N}(0, I_{j,0}). \quad (a)$$

$$J_{j,0} = P_0 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 Q_{j,T}}{\partial \beta_j \partial \beta_j'} (\underline{y}_T, \beta_j^0). \quad (b)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} cov_* \left\{ \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} (\underline{y}_T, \beta_j^0), \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} (\tilde{\underline{y}}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \beta_j^0) \right\} = K_{j,0}, \quad (c)$$



et indépendante des valeurs initiales  $z_0^h, h = 1, \dots, H$ .

$$\sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} \left( \tilde{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \beta_j^0 \right) \sim \mathcal{N}(0, I_{j,0}^*) \quad (d)$$

et indépendante des valeurs initiales  $z_0^h, h = 1, \dots, H$ .

$$J_{j,0}^* = P_* \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 Q_{j,T}}{\partial \beta_j \partial \beta_j'} \left( \tilde{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \beta_j^0 \right), \quad (e)$$

et indépendante des valeurs initiales  $z_0^h, h = 1, \dots, H$ .

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}_* \left\{ \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} \left( \tilde{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \beta_j^0 \right), \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} \left( \tilde{y}_T^l(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^l), \beta_j^0 \right) \right\} = K_{j,0}^*, \quad (f)$$

et indépendante des valeurs initiales  $z_0^h$ , pour  $h \neq l$ .

$$P_* \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \frac{\partial \tilde{\beta}_{j,T}^h}{\partial \alpha'} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2) = \frac{\partial \tilde{\beta}_j}{\partial \alpha'} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2), \quad (g)$$

est de plein rang colonne ( $p$ ). On peut définir les mêmes hypothèses pour le modèle  $i$ .

Notons qu'en général,  $I_{k,0} \neq I_{k,0}^*, J_{k,0} \neq J_{k,0}^*$  et  $K_{k,0} \neq K_{k,0}^*$  puisque le modèle structurel est mal spécifié. On peut établir la proposition suivante

**Proposition 4** Sous  $H_e$  et les hypothèses (A1)-(A3), l'estimateur optimal II de  $\hat{\theta}_{TH}^*$  est obtenu avec la matrice de poids  $\Omega_j^*$  défini en dessous. Il est asymptotiquement normal, lorsque  $H$  est fixé et  $T$  tend vers l'infini

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{1,TH} - \theta_1 \\ \hat{\theta}_{2,TH} - \bar{\theta}_2 \end{pmatrix} \rightarrow_d \mathcal{N}(0, W(H, \Omega_j^*))$$

avec

$$W(H, \Omega_j^*) = \left\{ \frac{\partial \tilde{\beta}_j'}{\partial \theta} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2) (\Phi_{j,0}^*(H))^{-1} \frac{\partial \tilde{\beta}_j}{\partial \theta'} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2) \right\}^{-1}, \quad (2.7)$$

$$\Omega_j^* = \Phi_{j,0}^*(H)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,0}^*(H) &= J_{j,0}^{-1} I_{j,0} J_{j,0}^{-1} + \frac{1}{H} J_{j,0}^{*-1} I_{j,0}^* J_{j,0}^{*-1} + \left(1 - \frac{1}{H}\right) J_{j,0}^{*-1} K_{j,0}^* J_{j,0}^{*-1} - J_{j,0}^{-1} K_{j,0} J_{j,0}^{-1} \\ &\quad - J_{j,0}^{*-1} K_{j,0}' J_{j,0}^{-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Preuve.** Voir Dridi, Guay et Renault (2007).  $\square$

Notons que dans le cas où le modèle structurel  $(M_\theta)$  est bien spécifié,  $\Phi_{j,0}^*(H)$  se résume à  $(1 + \frac{1}{H}) J_{j,0}^{-1}(I_{j,0} - K_{j,0})J_{j,0}^{-1}$  puisque  $K_{j,0} = K'_{j,0}$ . Un résultat similaire peut être obtenu pour  $\tilde{\beta}_i$  et  $\hat{\gamma}_{TH}$ .

## 2.5 Inférence indirecte séquentielle

Dans la section précédente on a montré comment une stratégie d'estimation d'inférence indirecte bien faite peut donner un estimateur convergent pour les paramètres d'intérêt étant donné le paramètre de nuisance  $\theta_2$ . Une fois cet estimateur obtenu, on peut maintenant évaluer le modèle à travers certaines dimensions additionnelles d'intérêt. Ces dimensions additionnelles sont résumées par un modèle instrumental  $\mathcal{N}_\psi$ , les paramètres  $\psi$  sont caractérisés par une estimation extremum définie comme la minimisation du critère  $M_T(\underline{y}_T, \psi)$ . Habituellement, ce critère est une fonction de perte utilisée pour vérifier dans une deuxième étape à quel point le modèle structurel est vrai par rapport aux faits stylisés d'intérêt, sous les hypothèses maintenues d'estimations convergentes des paramètres d'intérêt dans la première étape.

Dans le cas de conditions de moment, le critère correspondant est défini comme

$$M_T(\underline{y}_T, \psi) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(\underline{y}_t) - \psi \right)' \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(\underline{y}_t) - \psi \right),$$

où  $g(\cdot)$  sont les moments d'intérêt. Les estimateurs  $\hat{\psi}_T$  et  $\tilde{\psi}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2)$  associés au critère sont

$$\hat{\psi}_T = \arg \min_{\psi \in \Psi} M_T(\underline{y}_T, \psi),$$

$$\tilde{\psi}_{j,T}^h(\theta_1, \theta_2) = \arg \min_{\psi_j \in \Psi_j} M_T(\tilde{\underline{y}}_T^h(\theta, z_0^h), \psi_j),$$

$$\tilde{\psi}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \tilde{\psi}_{j,T}^h(\theta_1, \theta_2).$$

Les mêmes estimateurs peuvent être obtenus pour le modèle  $M_\gamma$  en remplaçant  $j$  par  $i$  et  $\theta$  par  $\gamma$ . Sous les conditions habituelles de régularité, ces estimateurs convergent uniformément en

$(\theta_1, \theta_2)$  vers

$$P_0 \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\psi}_T = \psi^0 = \psi(P_0),$$

$$P_* \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\psi}_{j,TH} = \tilde{\psi}_j(\theta_1, \theta_2).$$

On obtient les mêmes résultats pour le modèle  $M_\gamma$  en remplaçant  $j$  par  $i$  et  $\theta$  par  $\gamma$ . On va définir une procédure de test pour l'hypothèse nulle selon laquelle les deux modèles sont également faux

$$H_0 : \left\| \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2) \right\|_\Sigma = \left\| \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{i,TH}(\gamma_1, \gamma_2) \right\|_\Sigma, \quad (2.9)$$

contre l'alternative dans laquelle un des modèles donne une meilleure approximation. Le calibrationniste préfère le modèle  $(M_\theta)$  si l'alternative suivante est vraie

$$H_\theta : \left\| \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2) \right\|_\Sigma < \left\| \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{i,TH}(\gamma_1, \gamma_2) \right\|_\Sigma. \quad (2.10)$$

De la même façon, le calibrationniste préfère le modèle  $(M_\gamma)$  lorsque

$$H_\gamma : \left\| \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2) \right\|_\Sigma > \left\| \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{i,TH}(\gamma_1, \gamma_2) \right\|_\Sigma, \quad (2.11)$$

est vraie.

Notons que les hypothèses sont analogues à Hnatkovska, Marmer et Tang (2012), Vuong (1989), et Rivers et Vuong (2002), mais dans leur cas (sauf pour Hnatkovska, Marmer et Tang (2012) la décision dépend de la matrice de pondération.

Dans le but de tester l'hypothèse nulle dans (2.9), il est naturel de considérer la contrepartie échantillonnale de la différence d'ajustement entre les deux modèles en compétition laquelle est donnée par la statistique QLR suivante

$$QLR_T(\hat{\theta}_{TH}, \hat{\gamma}_{TH}) = - \left\| \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{j,TH}(\theta_1, \theta_2) \right\|_\Sigma + \left\| \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{i,TH}(\gamma_1, \gamma_2) \right\|_\Sigma \quad (2.12)$$

## 2.6 Comparaison de modèle

Comme dans Hnatkovska, Marmer et Tang (2012), et Rivers et Vuong (2002), lorsque l'on considère l'estimation et l'évaluation à partir de différents ensembles de paramètres de

forme réduite, le comportement asymptotique de la statistique  $QLR_T$  ne dépend pas du fait que les modèles soient imbriqués ou non.

**Proposition 5** *Sous  $H_e$  et les hypothèses (A1)-(A4), on a*

(a) *Sous  $H_0$  dans (2.9),  $T^{1/2}QLR_T(\hat{\theta}_{TH}, \hat{\gamma}_{TH}) \rightarrow_d \mathcal{N}(0, \Phi_0^{\psi,*})$ , où  $\Phi_0^{\psi,*}$  est défini en appendice.*

(b) *Sous  $H_\theta$  dans (2.10),  $T^{1/2}QLR_T(\hat{\theta}_{TH}, \hat{\gamma}_{TH}) \rightarrow \infty$  avec probabilité 1 ; sous l'alternative  $H_\gamma$  dans (2.11),  $T^{1/2}QLR_T(\hat{\theta}_{TH}, \hat{\gamma}_{TH}) \rightarrow -\infty$  avec probabilité 1.*

**Preuve.** Voir appendice A.  $\square$

Selon la proposition 5, la statistique  $T^{1/2}QLR_T$  a une distribution asymptotique normale sous l'hypothèse nulle. Ce résultat est similaire aux résultats de Hnatkovska, Marmer et Tang (2012) et Rivers et Vuong (2002). En effet comme le souligne Hnatkovska, Marmer et Tang (2012) la distribution de leur test dépend de la relation entre les modèles, plus précisément de si ils sont imbriqués, se chevauchent, ou sont non imbriqués. Dans les deux premiers cas le test suit une distribution chi-carrée, alors qu'il suit une distribution normale dans le dernier. En revanche lorsqu'ils considèrent le cas où l'estimation et l'évaluation sont faites à partir de différents ensembles de forme réduites (Hnatkovska, Marmer et Tang (2012), la distribution de la statistique de test ne dépend plus de la relation entre les modèles. Comme ils le soulignent, ceci vient du fait que même lorsque les modèles sont imbriqués un plus grand modèle ne donne pas forcément un meilleur ajustement, puisque les paramètres structurels ne sont pas calibrés pour minimiser la distance entre les vrais paramètres et les paramètres du modèle utilisé pour l'évaluation.

Soit  $\hat{\Phi}_T^{\psi,*}$  l'estimateur "plug-in" de  $\Phi_0^{\psi,*}$ . On rejette l'hypothèse nulle en faveur de  $H_\theta$  lorsque  $T^{1/2}QLR_T(\hat{\theta}_{TH}, \hat{\gamma}_{TH})/\hat{\Phi}_T^{\psi,*} > z_{1-\alpha/2}$ , où  $z_\alpha$  est le  $\alpha$ -ème quantile de la distribution normale standard. Si  $T^{1/2}QLR_T(\hat{\theta}_{TH}, \hat{\gamma}_{TH})/\hat{\Phi}_T^{\psi,*} < -z_{1-\alpha/2}$ , l'hypothèse nulle devrait être rejetée en faveur de  $H_\gamma$ .

## 2.7 Application

Dans cette section on applique le test proposé à deux modèles RBC. Le premier modèle est celui de Burnside et Eichenbaum (1996) qui est une évolution du modèle à rétention de main d'oeuvre de Burnside, Eichenbaum et Rebelo (1993). En effet, c'est une version modifiée qui permet une utilisation variable du capital, tout en gardant la possibilité de rétention de la main d'oeuvre. Le deuxième modèle, est le modèle de Ambler, Guay et Phaneuf (2012) qui est un modèle comportant des coûts d'ajustement du travail et des contrats de salaire échelonnés. On compare la qualité des deux modèles en se basant sur leur capacités à reproduire la dynamique complète du taux de croissance de l'output ainsi que des heures travaillées tel que représenté par un VAR (i.e., ses coefficients) avec 4 retards. Ces coefficients sont représentées par  $\psi$  dans notre application. On obtient un estimateur convergent de  $\psi^0$  à partir du VAR pour la croissance du PIB. Pour les coefficients estimés à partir des modèles, on simule  $H$  sentiers à partir des modèles, et on estime le même VAR aux séries simulées.

### 2.7.1 Modèle de Burnside et Eichenbaum (1996)

Le modèle est une variante du modèle de travail indivisible de Hansen (1985), qui est modifié pour incorporer la rétention de facteur sous la forme d'un taux d'utilisation du capital variable ainsi que d'un effort de travail variable. Le modèle de l'économie est constitué par un grand nombre d'individus vivant indéfiniment. Pour aller travailler, un individu doit faire face à un coût fixe de  $\xi$  heures. Une fois au travail, l'individu travaille un nombre d'heure fixe  $f$ .

L'output au temps  $t$  est produit selon

$$Y_t = (K_t U_t)^{1-\alpha} (N_t f W_t X_t)^\alpha \quad (2.13)$$

où  $0 < \alpha < 1$ ,  $K_t$  représente le stock de capital au début de la période  $t$ ,  $U_t$  représente le taux d'utilisation du capital,  $N_t$  le nombre d'individus au travail pendant la période  $t$ ,  $W_t$  le niveau d'effort à la période  $t$ , et  $X_t$  le niveau de technologie à la période  $t$ .

Une utilisation du capital plus intensive est supposée augmenter le taux auquel le capital se déprécie. De façon spécifique, il est supposé que le taux de dépréciation du capital au temps



$t$ ,  $\delta_t$  est

$$\delta_t = \delta U_t^\phi, \quad (2.14)$$

où  $0 < \delta < 1$  et  $\phi > 1$ . Le stock de capital a comme loi de mouvement

$$K_{t+1} = (1 - \delta_t)K_t + I_t, \quad (2.15)$$

où  $I_t$  dénote l'investissement brut en  $t$ . La loi de mouvement pour le niveau de technologie est

$$X_t = X_{t-1} \exp(\gamma + v_t), \quad (2.16)$$

où  $v_t$  dénote un processus non corrélé avec une moyenne nulle et un écart type  $\sigma_v$ . La contrainte de revenu agrégé est

$$C_t + I_t + G_t \leq Y_t, \quad (2.17)$$

où  $G_t$  est la consommation du gouvernement au temps  $t$ . La loi de mouvement de  $G_t$  est

$$G_t = X_t \exp(g_t), \quad (2.18)$$

où  $g_t$  a comme loi de mouvement

$$g_t = \mu(1 - \rho) + \rho g_{t-1} + \epsilon_t, \quad (2.19)$$

où  $\mu$  est un scalaire,  $|\rho| < 1$ , et  $\epsilon_t$  est un processus non corrélé avec une moyenne nulle et un écart type  $\sigma_\epsilon$ . L'objectif du ménage est donc de maximiser la fonction suivante

$$\max \left\{ E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln(C_t) + \theta N_t \ln(T - \xi - W_t f) + \theta(1 - N_t) \ln(T)] \right\}, \quad (2.20)$$

par choix de  $C_t$ ,  $K_{t+1}$ ,  $N_t$ ,  $U_t$ , et  $W_t$ , soumis aux contraintes (2.13), (2.14), et (2.16)-(2.19).

Pour la rétention de facteur, il est supposé que  $N_t$  doit être choisi avant que  $X_t$  et  $g_t$  ne soit choisi. Ceci traduit l'idée que les firmes doivent prendre leurs décisions conditionnellement à leur vue sur l'état futur de la demande et de la technologie, et ainsi la firme ne peut ajuster de façon instantanée le nombre d'employés suite à un choc affectant leur environnement.

Pour résoudre le modèle, on commence par transformer les variables en les divisant par le niveau de technologie  $X_t$ . Ensuite on log-linéarise les conditions d'équilibre autour de l'état stationnaire et on résout le système linéaire d'équations aux différences. On utilise la solution obtenue pour simuler  $H$  sentiers de chaque série, puis on obtient les fonctions de réponses du modèle à partir du SVAR.

## 2.7.2 Modèle Ambler, Guay et Phaneuf (2012)

Le cadre du modèle est un modèle à un secteur avec un travail variable et une accumulation du capital endogène. La firme représentative produit un bien final en utilisant une technologie à rendement d'échelle constant et doit payer un certain coût pour faire varier son input de travail. Les ménages sont en compétition imparfaite par rapport à la qualité du travail. Ils achètent deux types de biens de consommation : un bien "cash" et un bien "crédit". La monnaie est détenue de par la contrainte de "cash in advance" pour chaque bien. Les ménages prêtent leur capital et leur force de travail à la firme représentative. Les salaires nominaux sont fixés par un contrat à la Calvo et les prix sont ré-optimisés à chaque période.

La technologie de la firme représentative est la fonction de production suivante

$$Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} N_t^\alpha, \quad (2.21)$$

où  $Y_t$  est l'output final,  $K_t$  est le stock de capital final,  $N_t$  est le nombre total d'heures travaillées et  $A_t$  est le niveau de technologie. La loi de mouvement du stock de capital est

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t, \quad (2.22)$$

où  $\delta$  est le taux de dépréciation du capital physique. Le log du progrès technologique est supposé suivre une marche aléatoire avec dérive,

$$\ln(A_{t+1}) = \ln(A) + \ln(A_t) + \epsilon_{t+1}, \quad (2.23)$$

où  $\epsilon_t$  est un choc i.i.d. A chaque période la firme maximise ses profits donnés par

$$Y_t - \frac{W_t}{P_t} N_t - Q_t K_t - \frac{\alpha_n}{n} A_t (N_t - N_{t-1})^2, \quad (2.24)$$

sujet à la contrainte (2.21), en prenant le prix et le salaire comme données.  $W_t$  est le taux de salaire agrégé,  $Q_t$  est le taux de rémunération réel du capital,  $P_t$  est le niveau de prix agrégé et  $\alpha_n$  est le paramètre d'ajustement du travail.

Le ménage doté d'aptitude  $h$  a comme préférence

$$E_t^h \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (\omega \ln(C_{1t+i}) + (1 - \omega) \ln(C_{2t+i}) + \phi(1 - N(h)_{t+i})), \quad (2.25)$$

où  $E_t^h$  dénote l'opérateur d'espérance conditionnelle à l'information disponible jusqu'en  $t$ ,  $C_{1t}$  est le bien cash et  $C_{2t}$  et le bien de crédit,  $N(h)_t$  dénote les heures travaillées par le ménage  $h$ , et le temps total disponible est normalisé à 1.

Au début de la période  $t$ , le ménage  $h$  dispose d'un montant de monnaie égal à  $M_t + (1 + R_{t-1}) + B(h)_t + T_t$ , où  $M_t$  est le stock de monnaie du ménage au début de la période, le deuxième terme est le principal plus les intérêts tirés de la détention de bons du gouvernement,  $B(h)_t$ , et  $T_t$  est le transfert forfaitaire reçu par le ménage. Durant la période  $t$ , le ménage acquiert des bons, lesquels sont gardés jusqu'à la période suivante,  $B(h)_{t+1}$ . Ainsi, l'achat de bien cash dans la période  $t$  doit satisfaire la contrainte de cash-in-advance suivante

$$P_t C_{1t} \leq M_t + (1 + R_{t-1})B(h)_t + T_t - B(h)_{t+1}. \quad (2.26)$$

L'allocation des ménages doit satisfaire la séquence de contrainte budgétaire suivante

$$\begin{aligned} C_{1t+i} + C_{2t+i} + I_{t+i} + \frac{M_{t+i+1}}{P_{t+i}} + \frac{B(h)_{t+i+1}}{P_{t+i}} &\leq \frac{W(h)_{t+i}}{P_{t+i}} N(h)_{t+i} + Q_{t+i} K_{t+i} \\ &+ \frac{T_{t+i}}{P_{t+i}} + \frac{M_{t+i}}{P_{t+i}} + \frac{(1 + R_{t+i-1})B(h)_{t+i}}{P_{t+i}}, \quad 0 \leq i \leq \infty, \end{aligned} \quad (2.27)$$

où  $I_{t+i}$  est l'investissement brut en  $t + i$  et  $W(h)_{t+i}$  est le taux de salaire nominal du ménage  $h$  en  $t + i$ . Le ménage  $h$  maximise (2.25) sujet aux contraintes (2.26) et (2.27), et à la contrainte de non négativité.

L'offre de travail agrégée,  $N_t$ , est un composite de toutes les aptitudes de travail

$$N_t = \left( \int_0^1 N(h)_t^{1/(1+\theta_w)} dh \right)^{1+\theta_w}. \quad (2.28)$$

La fonction de demande pour un travailleur ayant l'aptitude  $h$

$$N(h)_t = \left( \frac{X_t(h)}{W_t} \right)^{-(1+\theta_w)/\theta_w} N_t, \quad (2.29)$$

où  $(1 + \theta_w)/\theta_w$  est l'élasticité de substitution entre des travailleurs d'aptitudes différentes et le taux de salaire agrégé  $W_t$  est relié à  $W(h)_t$  par

$$W_t \equiv \left( \int_0^1 W(h)_t^{-1/\theta_w} dh \right)^{-\theta_w}. \quad (2.30)$$

A chaque période, le ménage a une probabilité constante  $(1 - d)$  de réoptimiser son salaire nominal. La capacité de réoptimiser est indépendante dans le temps et à travers les ménages. Le taux de salaire optimal du ménage  $h$  au temps  $t$  satisfait la condition de première ordre suivante

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} (\beta d)^i \left( \frac{1}{1 + \theta_w} \frac{W(h)_t}{P_{t+i}} \lambda_{t+i} + V(h)_{N,t+i} \right) N(h)_{t+i} = 0, \quad (2.31)$$

où  $\lambda_{t+i}$  est l'utilité marginale de la consommation laquelle est identique à travers les ménages et où

$$V(h)_{N,t+i} \equiv \frac{-\phi}{(1 - N(h)_{t+i})}. \quad (2.32)$$

Une fois le salaire nominal fixé, le ménage  $h$  offre une quantité de travail égale à (2.29).

L'autorité monétaire transfère la balance de la monnaie aux ménages. Son flux de contrainte budgétaire est

$$M_{t+1} - M_t = T_t, \quad (2.33)$$

où  $M_t$  est le stock de monnaie per capita. Le taux de croissance de l'offre de monnaie est donné par

$$\ln(g_t) = (1 - \rho_m)\mu_m + \rho_m \ln(g_{t-1}) + v_t, \quad (2.34)$$

où  $\ln(g_t) \equiv \ln(M_t/M_{t-1})$ ,  $0 < \rho_m < 1$ ,  $\mu_m$  est le taux de croissance de la monnaie à l'état stationnaire, et  $v_t$  est le choc sur processus de croissance de la monnaie.

Pour résoudre le modèle, on divise les variables réelles par le niveau de technologie et les variables nominales par le stock de monnaie. On effectue ensuite une log-linéarisation autour de l'équilibre stationnaire non stochastique. A partir de la solution obtenue on simule  $H$  sentiers de chaque série, et on obtient les fonctions de réponses du modèle à partir du SVAR.

### 2.7.3 Estimations des modèles et comparaisons des résultats

On va maintenant appliquer la méthodologie de test développée dans les sections précédentes. Les données utilisées pour l'estimation des modèles proviennent toutes de la Federal Reserve Bank of St. Louis pour la période 1959 :T1-2009 :T3.

Dans la première étape on utilise une procédure GMM en deux étapes pour estimer les paramètres des modèles et vérifier leur convergence. On commence par choisir un ensemble de conditions de moment pour identifier les principaux paramètres structurels des modèles, les résultats sont résumés dans le tableau A.1. Ensuite, comme le nombre de conditions de moments est supérieur au nombre de paramètres à estimer on peut effectuer un test sur les restrictions suridentifiées impliquées par le modèle. Pour les deux modèles le test de suridentification confirme le fait que les paramètres sont estimés de façon convergente (tableau A.1). Notons que dans notre cas, on se restreint au cas où l'on ne fait pas de simulation dans la première étape. On obtient un vecteur de paramètres estimés  $\hat{\beta}_{k,T}$  ( $k = j, i$ ) pour chaque modèle.

A partir des vecteurs de paramètres estimés des modèles on simule 100 sentiers pour les séries du taux de croissance du PIB et des heures travaillées. On estime ensuite notre modèle VAR bivarié (taux de croissance du PIB et heures travaillées). Ceci nous permet donc d'obtenir les deux vecteurs de coefficients estimés  $\tilde{\psi}_{k,TH}$  ( $k = j, i$ ). De même on obtient les coefficients empiriques en utilisant les données réelles, i.e. le vecteur  $\hat{\psi}_T$ .

Pour déterminer si ces résultats sont statistiquement significatifs, on applique notre procédure en deux étapes décrite dans la section 6. Dans la première étape on estime les paramètres des modèles par GMM. Dans la deuxième étape, on rejette l'hypothèse nulle selon laquelle les deux modèles sont équivalents en comparant  $T^{1/2}QLR_T(\hat{\theta}_{TH}, \hat{\gamma}_{TH}) / \hat{\Phi}_T^{\psi,*}$  avec les valeurs critiques d'une normale standard. La valeur obtenue pour la statistique de test est 3.79 (valeur- $p$  de 0.000148), et donc le modèle Ambler, Guay et Phaneuf (2012) prend mieux en compte la dynamique du taux de croissance de l'output ainsi que celle des heures travaillées. Ceci nous permet de conclure que les rigidités salariales et les coûts d'ajustement du travail introduits dans le modèle sont de bons éléments pour reproduire la dynamique des ces deux séries.



## 2.8 Conclusion

Dans notre article on développe un test pour comparer les modèles d'équilibre général stochastique. Notre test est relié de près à celui développé par Hnatkovska, Marmer et Tang (2012). Cependant le test développé permet d'étendre leur modèle en relâchant certaines hypothèses. Premièrement nous utilisons la méthode d'inférence indirecte, ce qui nous permet de relâcher l'hypothèse forte faite par Hnatkovska, Marmer et Tang (2012) sur la convergence de leurs estimateurs. En effet dans notre cas de par la condition d'englobement, la convergence de nos estimateurs est assurée. Deuxièmement lors de notre estimation, on peut utiliser des vecteurs de paramètres instrumentaux différents pour chacun des modèles, ce qui n'était pas le cas pour le test de Hnatkovska, Marmer et Tang (2012).

Le principal résultat que l'on obtient est que la distribution asymptotique du test est normale, que les modèles soient imbriqués ou non. Pour présenter l'utilisation de notre test, nous l'appliquons pour comparer le modèle Burnside et Eichenbaum (1996) et le modèle de Ambler, Guay et Phaneuf (2012), afin de comparer leur capacités à reproduire la dynamique des cycles réels aux États-Unis. Notre résultat montre que le modèle de Ambler, Guay et Phaneuf (2012) prend mieux en compte cette dynamique, de par l'introduction des rigidités salariales et les coûts d'ajustement du travail.

## APPENDICE A

### PREUVES

#### A.1 Preuve proposition 5

On peut réécrire le premier terme de l'équation (2.12), en effectuant une expansion de  $\tilde{\psi}_{j,TH}(\hat{\theta}_{TH})$  en  $\tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0)$ , comme

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{j,TH}(\hat{\theta}_{TH})\|_{\Sigma} &= \left[ \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0) - \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta'}(\theta^0)(\hat{\theta}_{TH} - \theta^0) \right]' \Sigma \left[ \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0) - \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta'}(\theta^0)(\hat{\theta}_{TH} - \theta^0) \right] + o_p(T^{-1/2}) \\ &= \left[ \hat{\psi}_T - \psi^0 - \tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0) + \tilde{\psi}_j(\theta^0) - \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta'}(\theta^0)(\hat{\theta}_{TH} - \theta^0) + \psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta_0) \right]' \Sigma \\ &\quad \times \left[ \hat{\psi}_T - \psi^0 - \tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0) + \tilde{\psi}_j(\theta^0) - \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta'}(\theta^0)(\hat{\theta}_{TH} - \theta^0) + \psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta_0) \right] + o_p(T^{-1/2}) \end{aligned} \quad (A.1)$$

En effectuant une expansion de  $\frac{\partial M_T}{\partial \psi}(\underline{y}_T, \hat{\psi}_T)$  en  $\psi^0$ , on obtient

$$(\hat{\psi}_T - \psi^0) = - \left( \frac{\partial^2 M_T}{\partial \psi \partial \psi'}(\underline{y}_T, \psi^0) \right)^{-1} \frac{\partial M_T}{\partial \psi}(\underline{y}_T, \psi^0) + o_{p_0}(1),$$

de même pour le modèle structurel on obtient

$$(\tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0) - \tilde{\psi}_j(\theta^0)) = - \left( \frac{\partial^2 M_{j,T}}{\partial \psi_j \partial \psi_j'}(\tilde{\underline{y}}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0)) \right)^{-1} \frac{\partial M_{j,T}}{\partial \psi_j}(\tilde{\underline{y}}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0)) + o_{p_*}(1).$$

On peut donc réécrire (A.1) comme

$$\begin{aligned}
 \|\hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{j,TH}(\hat{\theta}_{TH})\|_{\Sigma} &= \|\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0)\|_{\Sigma} + 2(\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0))' \Sigma \left[ \hat{\psi}_T - \psi^0 - (\tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0) - \tilde{\psi}_j(\theta^0)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{\psi}_j(\theta^0)}{\partial \theta'} (\hat{\theta}_{TH} - \theta^0) \right] + o_p(T^{-1/2}) \quad (\text{A.2}) \\
 &= \|\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0)\|_{\Sigma} + 2(\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0))' \Sigma \left[ - \left( \frac{\partial^2 M_T}{\partial \psi \partial \psi'} (\underline{y}_T, \psi^0) \right)^{-1} \frac{\partial M_T}{\partial \psi} (\underline{y}_T, \psi^0) \right. \\
 &\quad + \left( \frac{\partial^2 M_{j,T}}{\partial \psi_j \partial \psi_j'} (\underline{y}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0)) \right)^{-1} \frac{\partial M_{j,T}}{\partial \psi_j} (\underline{y}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0)) \\
 &\quad - \frac{\partial \tilde{\psi}_j(\theta^0)}{\partial \theta'} W(H, \Omega_j) \frac{\partial \tilde{\beta}_j'}{\partial \theta}(\theta^0) \Omega_j \left( -J_{j,0}^{-1} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j}(\underline{y}_T, \beta_j^0) \right. \\
 &\quad \left. + J_{j,0}^{*-1} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j}(\underline{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \beta_j^0) \right) \left. \right] + o_p(T^{-1/2})
 \end{aligned}$$

On peut obtenir une expression similaire à (A.2) pour  $\|\hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{i,TH}(\hat{\gamma}_{TH})\|_{\Sigma}$  où  $\tilde{\psi}_j$ ,  $\theta$  et  $\mathcal{N}_{\theta}$  sont remplacés par  $\tilde{\psi}_i$ ,  $\gamma$  et  $\mathcal{N}_{\gamma}$ . Donc

$$\begin{aligned}
 \text{QLR}_T(\hat{\theta}_{TH}, \hat{\gamma}_{TH}) &= -\|\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0)\|_{\Sigma} + \|\psi^0 - \tilde{\psi}_i(\gamma^0)\|_{\Sigma} - 2(\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0))' \Sigma \left[ \hat{\psi}_T - \psi^0 - (\tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0) - \tilde{\psi}_j(\theta^0)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{\psi}_j(\theta^0)}{\partial \theta'} (\hat{\theta}_{TH} - \theta^0) \right] + 2(\psi^0 - \tilde{\psi}_i(\gamma^0))' \Sigma \left[ \hat{\psi}_T - \psi^0 - (\tilde{\psi}_{i,TH}(\gamma^0) - \tilde{\psi}_i(\gamma^0)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\gamma^0)}{\partial \gamma'} (\hat{\gamma}_{TH} - \gamma^0) \right] + o_p(T^{-1/2}) \\
 &= -\|\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0)\|_{\Sigma} + \|\psi^0 - \tilde{\psi}_i(\gamma^0)\|_{\Sigma} - 2(\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma \left[ -(\tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0) - \tilde{\psi}_j(\theta^0)) - \frac{\partial \tilde{\psi}_j(\theta^0)}{\partial \theta'} (\hat{\theta}_{TH} - \theta^0) \right. \\
 &\quad \left. + (\tilde{\psi}_{i,TH}(\gamma^0) - \tilde{\psi}_i(\gamma^0)) + \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\gamma^0)}{\partial \gamma'} (\hat{\gamma}_{TH} - \gamma^0) \right] + o_p(T^{-1/2}) \\
 &= -\|\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0)\|_{\Sigma} - \|\psi^0 - \tilde{\psi}_i(\gamma^0)\|_{\Sigma} - 2(\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma \left[ \left( \frac{\partial^2 M_T}{\partial \psi_j \partial \psi_j'} (\underline{y}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0)) \right)^{-1} \right. \\
 &\quad \times \frac{\partial M_T}{\partial \psi_j} (\underline{y}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0)) - \frac{\partial \tilde{\psi}_j(\theta^0)}{\partial \theta'} W(H, \Omega_j) \frac{\partial \tilde{\beta}_j'}{\partial \theta}(\theta^0) \Omega_j \left( -J_{j,0}^{-1} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j}(\underline{y}_T, \beta_j^0) \right. \\
 &\quad \left. + J_{j,0}^{*-1} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j}(\underline{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \beta_j^0) \right) - \left( \frac{\partial^2 M_T}{\partial \psi_i \partial \psi_i'} (\underline{y}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_i(\gamma^0)) \right)^{-1} \\
 &\quad \times \frac{\partial M_T}{\partial \psi_i} (\underline{y}_T^h(\gamma^0, z_0^h), \tilde{\psi}_i(\gamma^0)) + \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\gamma^0)}{\partial \gamma'} W(H, \Omega_i) \frac{\partial \tilde{\beta}_i'}{\partial \gamma}(\gamma^0) \Omega_i \left( -J_{i,0}^{-1} \frac{\partial Q_{i,T}}{\partial \beta_i}(\underline{y}_T, \beta_i^0) \right. \\
 &\quad \left. + J_{i,0}^{*-1} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \frac{\partial Q_{i,T}}{\partial \beta_i}(\underline{y}_T^h(\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2, z_0^h), \beta_i^0) \right) \left. \right] + o_p(T^{-1/2}) \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

Notons que pour obtenir la deuxième égalité on utilise le fait que sous  $H_0$ , on a  $\tilde{\psi}_j(\theta_0) = \tilde{\psi}_i(\gamma_0) = \tilde{\psi}^0$ .

Définissons les vecteurs suivants

$$\begin{aligned}\sqrt{T} \frac{\partial Q_T}{\partial \zeta} (\underline{y}_T, \zeta) &= \left( \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} (\underline{y}_T, \beta_j)' , \sqrt{T} \frac{\partial Q_{i,T}}{\partial \beta_i} (\underline{y}_T, \beta_i)' \right)' \\ \sqrt{T} \frac{\partial \tilde{Q}_T}{\partial \zeta} (\underline{y}_T^h(\alpha_1^0, \bar{\alpha}_2, z_0^h), \zeta) &= \left( \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} (\underline{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \beta_j)' , \sqrt{T} \frac{\partial Q_{i,T}}{\partial \beta_i} (\underline{y}_T^h(\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2, z_0^h), \beta_i)' \right)' \\ \sqrt{T} \frac{\partial \tilde{M}_T}{\partial \zeta} (\underline{y}_T^h(\alpha_1^0, \bar{\alpha}_2, z_0^h), \tilde{\zeta}) &= \left( \sqrt{T} \frac{\partial M_{j,T}}{\partial \psi_j} (\underline{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \psi_j)' , \sqrt{T} \frac{\partial M_{i,T}}{\partial \psi_i} (\underline{y}_T^h(\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2, z_0^h), \psi_i)' \right)' \\ \sqrt{T} \frac{\partial V_T}{\partial \bar{\zeta}} (\underline{y}_T, \bar{\zeta}) &= \left( \sqrt{T} \frac{\partial Q_T}{\partial \zeta} (\underline{y}_T, \zeta)' , \sqrt{T} \frac{\partial \tilde{Q}_T}{\partial \zeta} (\underline{y}_T^h(\alpha_1^0, \bar{\alpha}_2, z_0^h), \zeta)' , \sqrt{T} \frac{\partial \tilde{M}_T}{\partial \tilde{\zeta}} (\underline{y}_T^h(\alpha_1^0, \bar{\alpha}_2, z_0^h), \tilde{\zeta})' \right)'\end{aligned}$$

où  $\zeta = (\beta_j', \beta_i')'$ ,  $\tilde{\zeta} = (\psi_j', \psi_i')'$ ,  $\alpha_1^0 = (\theta_1^{0'}, \gamma_1^{0'})'$ ,  $\bar{\alpha}_2 = (\bar{\theta}_2', \bar{\gamma}_2')'$ ,  $\bar{\zeta} = (\zeta', \zeta', \tilde{\zeta}')'$ . On fait les hypothèses suivantes.

#### Hypothèse (A4)

$$\sqrt{T} \frac{\partial Q_T}{\partial \zeta} (\underline{y}_T, \zeta) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{j,0} & I_{ji,0} \\ I_{ij,0} & I_{i,0} \end{bmatrix} \right), \quad (a)$$

$$\sqrt{T} \frac{\partial \tilde{Q}_T}{\partial \zeta} (\underline{y}_T^h(\alpha_1^0, \bar{\alpha}_2, z_0^h), \zeta) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_{j,0}^* & 0 \\ 0 & I_{i,0}^* \end{bmatrix} \right), \quad (b)$$

$$\sqrt{T} \frac{\partial \tilde{M}_T}{\partial \tilde{\zeta}} (\underline{y}_T^h(\alpha_1^0, \bar{\alpha}_2, z_0^h), \tilde{\zeta}) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L_{j,0}^* & 0 \\ 0 & L_{i,0}^* \end{bmatrix} \right), \quad (c)$$

$$B_{j,0}^* = P_0 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 M_{j,T}}{\partial \psi_j \partial \psi_j'} (\underline{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \psi_j), \quad (d)$$

$$B_{i,0}^* = P_0 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 M_{i,T}}{\partial \psi_i \partial \psi_i'} (\underline{y}_T^h(\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2, z_0^h), \psi_i), \quad (e)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}_* \left\{ \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} (\underline{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \beta_j)' , \sqrt{T} \frac{\partial M_{j,T}}{\partial \psi_j} (\underline{y}_T^h(\theta_1^0, \bar{\theta}_2, z_0^h), \psi_j)' \right\} = C_{j,0}^*, \quad (f)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}_* \left\{ \sqrt{T} \frac{\partial Q_{i,T}}{\partial \beta_i} (\underline{y}_T^h(\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2, z_0^h), \beta_i)' , \sqrt{T} \frac{\partial M_{i,T}}{\partial \psi_i} (\underline{y}_T^h(\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2, z_0^h), \psi_i)' \right\} = C_{i,0}^*. \quad (g)$$

$$\sqrt{T} \frac{\partial V_T}{\partial \bar{\zeta}} (\underline{y}_T, \bar{\zeta}) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \Gamma). \quad (h)$$

Sous les hypothèses (A1)-(A4),

$$\begin{aligned}\Omega &= \begin{bmatrix} (-J_{j,0})^{-1} & (-J_{i,0})^{-1} & J_{j,0}^{*-1} & J_{i,0}^{*-1} & (-B_{j,0}^*)^{-1} & (-B_{i,0}^*)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left( \sqrt{T} \frac{\partial Q_T}{\partial \zeta} (\underline{y}_T, \zeta)' , \sqrt{T} \frac{\partial \tilde{Q}_T}{\partial \zeta} (\underline{y}_T^h(\alpha_1^0, \bar{\alpha}_2, z_0^h), \zeta)' , \sqrt{T} \frac{\partial \tilde{M}_T}{\partial \tilde{\zeta}} (\underline{y}_T^h(\alpha_1^0, \bar{\alpha}_2, z_0^h), \tilde{\zeta})' \right)'\end{aligned}$$

est distribuée normalement de façon asymptotique avec une moyenne nulle et une matrice de

covariance donnée par

$$\Lambda = \begin{bmatrix} J_{j,0}^{-1} I_{j,0} J_{j,0}^{-1} & J_{j,0}^{-1} I_{ji,0} J_{j,0}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{i,0}^{-1} I_{ij,0} J_{j,0}^{-1} & J_{i,0}^{-1} I_{ii,0} J_{j,0}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{H} J_{j,0}^{*-1} I_{j,0}^* J_{j,0}^{*-1} & 0 & -J_{j,0}^{*-1} C_{j,0}^* B_{i,0}^{*-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} J_{i,0}^{*-1} I_{i,0}^* J_{i,0}^{*-1} & 0 & -J_{i,0}^{*-1} C_{i,0}^* B_{i,0}^{*-1} \\ 0 & 0 & -B_{j,0}^{*-1} C_{j,0}^{*'} J_{j,0}^{*-1} & 0 & \frac{1}{H} B_{j,0}^{*-1} L_{j,0}^* B_{j,0}^{*-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{i,0}^{*-1} C_{i,0}^{*'} J_{i,0}^{*-1} & 0 & \frac{1}{H} B_{i,0}^{*-1} L_{i,0}^* B_{i,0}^{*-1} \end{bmatrix}.$$

On peut donc réécrire le troisième et le quatrième terme (en les prémultipliant par  $\sqrt{T}$ ) de (A.3) comme

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{bmatrix} \Omega \quad (\text{A.4})$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \left[ (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^* \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta'} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2) W(H, \Omega_j^*) \frac{\partial \tilde{\beta}_j'}{\partial \theta} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2) \Omega_j^* \right] \\ A_2 &= -2 \left[ (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^* \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \gamma'} (\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2) W(H, \Omega_i^*) \frac{\partial \tilde{\beta}_i'}{\partial \gamma} (\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2) \Omega_i^* \right] \\ A_3 &= 2 \left[ (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^* \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta'} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2) W(H, \Omega_j^*) \frac{\partial \tilde{\beta}_j'}{\partial \theta} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2) \Omega_j^* \right] \\ A_4 &= -2 \left[ (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^* \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \gamma'} (\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2) W(H, \Omega_i^*) \frac{\partial \tilde{\beta}_i'}{\partial \gamma} (\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2) \Omega_i^* \right] \\ A_5 &= 2 (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^* \\ A_6 &= -2 (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^* \end{aligned}$$

Ceci implique que la partie gauche de (A.3) est distribuée normalement de façon asymptotique avec une moyenne nulle et une matrice de covariance donnée par  $\Phi_0^{\psi,*}(H)$

$$\Phi_0^{\psi,*}(H) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{bmatrix}'$$

□

## A.2 Preuve exemple empirique

**Première étape :** Estimation par GMM des paramètres du modèle. Notons que l'on se restreint au cas où l'on ne fait pas de simulation.

On a le problème suivant

$$Q_{j,T} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_j(\underline{y}_t) - \beta_j^0 \right]' \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_j(\underline{y}_t) - \beta_j^0 \right],$$



qui a pour solution,

$$\hat{\beta}_{j,T} = \arg \min_{\beta_j \in B_j} Q_{j,T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_j(\underline{y}_t).$$

Pour le modèle on a

$$\tilde{\beta}_{j,T}(\theta) = \arg \min_{\beta_j \in B_j} Q_{j,T}(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_j(\underline{y}_t(\theta)).$$

On suppose que

$$\begin{aligned} \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, I_{j,0}), \quad \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}(\theta)}{\partial \beta_j(\theta)} \rightarrow 0, \\ J_{j,0} &= \frac{\partial^2 Q_{j,T}}{\partial \beta_j \beta_j'}, \quad J_{j,0}^* = \frac{\partial^2 Q_{j,T}(\theta)}{\partial \beta_j(\theta) \beta_j'(\theta)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} &= - \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_j(\underline{y}_t) - \beta_j^0 \right], \quad \frac{\partial Q_{j,T}(\theta)}{\partial \beta_j(\theta)} = - \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_j(\underline{y}_t(\theta)) - \beta_j(\theta^0) \right] \\ \frac{\partial^2 Q_{j,T}}{\partial \beta_j \beta_j'} &= \mathbf{I}, \quad \frac{\partial^2 Q_{j,T}(\theta)}{\partial \beta_j(\theta) \beta_j'(\theta)} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Notons que puisque l'on ne fait pas de simulation dans notre première étape, pour un  $\theta$  donné il n'y a pas d'incertitude dans  $\frac{\partial Q_{j,T}(\theta)}{\partial \beta_j(\theta)}$ . De par la preuve on a

$$\begin{aligned} \sqrt{T} (\hat{\beta}_{j,T} - \beta_j^0) &= -J_{j,0}^{-1} \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j} + o_{p_0}(1) \\ \sqrt{T} (\tilde{\beta}_{j,T} - \beta_j(\theta^0)) &= -J_{j,0}^{*-1} \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}(\theta)}{\partial \beta_j(\theta)} + o_{p_0}(1) \\ \Rightarrow \sqrt{T} (\hat{\beta}_{j,T} - \beta_j^0) &\xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \Phi_{j,0}^*), \end{aligned}$$

où  $\Phi_{j,0}^* = J_{j,0}^{-1} I_{j,0} J_{j,0}^{-1'}$ . On a donc

$$\Phi_{j,0}^* = I_{j,0}$$

Pour  $\hat{\theta}_T$ , on a

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_T &= \arg \min_{\theta \in \Theta} [\hat{\beta}_{j,T} - \tilde{\beta}_{j,T}(\theta)]' \hat{\Omega}_{j,T} [\hat{\beta}_{j,T} - \tilde{\beta}_{j,T}(\theta)] \\ \sqrt{T} (\hat{\theta}_T - \theta^0) &= \left\{ \frac{\partial \tilde{\beta}_{j,T}(\theta)}{\partial \theta} I_{j,0}^{-1} \left( \frac{\partial \tilde{\beta}_{j,T}(\theta)}{\partial \theta} \right)' \right\}^{-1} \frac{\partial \tilde{\beta}_{j,T}(\theta)}{\partial \theta} \Phi_{j,0}^{*-1} \sqrt{T} (\hat{\beta}_{j,T} - \tilde{\beta}_{j,T}(\theta)) + o_{p_*}(1) \\ \text{var}(\hat{\theta}_T) &= \left\{ \frac{\partial \tilde{\beta}_{j,T}(\theta)}{\partial \theta} \Phi_{j,0}^{*-1} \left( \frac{\partial \tilde{\beta}_{j,T}(\theta)}{\partial \theta} \right)' \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

**Deuxième étape]** : Estimation de notre modèle VAR sur les données et les données simulées puis construction de la statistique de test.

Dans notre cas on estime le VAR(4) suivant

$$y_t = \mu + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + A_3 y_{t-3} + A_4 y_{t-4} + u_t, \quad (A.5)$$

où

$$\begin{aligned} \mu_{2 \times 1} &= (\mu_1, \mu_2)', \quad y_t = (\Delta \text{PIB}_t, H_t)', \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i \end{bmatrix}, \quad Y = (y_1, \dots, y_T), \\ \psi_{2 \times 9} &= (\mu, A_1, A_2, A_3, A_4), \quad Z_t = \begin{bmatrix} 1 & y_t & y_{t-1} & y_{t-2} & y_{t-3} \end{bmatrix}', \quad \Psi = \text{vec}(\psi), \quad \mathbf{y} = \text{vec}(Y). \end{aligned}$$

Avec cette notation on peut réécrire le modèle VAR(4) (A.5) comme

$$\begin{aligned} y_t &= \psi Z_t + u_t \\ \text{vec}(y_t) &= \text{vec}(\psi Z_t) + \text{vec}(u_t) \\ y_t &= (Z_t' \otimes I_2) \text{vec}(\psi) + u_t \\ y_t &= (Z_t' \otimes I_2) \Psi + u_t. \end{aligned}$$

Dans notre cas la fonction objective est la suivante (on estime par MCO)

$$\begin{aligned} M_T &= \sum_{t=1}^T [y_t - (Z_t' \otimes I_2) \Psi]' [y_t - (Z_t' \otimes I_2) \Psi] \\ \frac{\partial M_T}{\partial \Psi} &= -2 \sum_{t=1}^T (Z_t' \otimes I_2) [y_t - (Z_t' \otimes I_2) \Psi] \\ \frac{\partial^2 M_T}{\partial \Psi \partial \Psi'} &= 2 \sum_{t=1}^T (Z_t Z_t' \otimes I_2) \end{aligned}$$

Dans notre cas  $\hat{\psi}_T$  et  $\tilde{\psi}_{j,TH}(\hat{\theta}_T)$  sont les coefficients estimés du VAR, on va construire notre statistique de test en se basant sur ces estimés. De la preuve on a

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{j,T}(\hat{\theta}_T)\|_{\Sigma} &= \|\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta_0)\|_{\Sigma} + 2 (\psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0))' \Sigma \left[ \left( \frac{\partial^2 M_{j,T}}{\partial \psi_j \partial \psi_j'} \left( \frac{\tilde{y}_T^h}{\tilde{y}_T^h}(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0) \right) \right)^{-1} \right. \\ &\quad \times \frac{\partial M_{j,T}}{\partial \psi_j} \left( \frac{\tilde{y}_T^h}{\tilde{y}_T^h}(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0) \right) - \frac{\partial \tilde{\psi}_j(\theta^0)}{\partial \theta'} W(\Phi_{j,0}^*) \frac{\partial \tilde{\beta}_j'}{\partial \theta}(\theta^0) \Omega_j \\ &\quad \left. \times \left( -J_{j,0}^{-1} \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j}(\underline{y}_T, \beta_j^0) + J_{j,0}^{*-1} \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j(\theta)}(\underline{y}_T(\theta), \beta_j^0) \right) \right] + o_p(T^{-1/2}) \end{aligned}$$

où

$$W(\Phi_{j,0}^*) = \left\{ \frac{\partial \tilde{\beta}_{j,T}}{\partial \theta} \Phi_{j,0}^{*-1} \left( \frac{\partial \tilde{\beta}_{j,T}}{\partial \theta} \right)' \right\}^{-1}.$$

On peut obtenir une expression similaire pour  $\left\| \hat{\psi}_T - \tilde{\psi}_{i,TH}(\hat{\gamma}_T) \right\|_{\Sigma}$  où  $\tilde{\psi}_j$  et  $\theta$  sont remplacés par  $\tilde{\psi}_i$  et  $\gamma$ . Donc

$$\begin{aligned} \text{QLR}_T(\hat{\theta}_T, \hat{\gamma}_T) &= -\left\| \psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0) \right\|_{\Sigma} + \left\| \psi^0 - \tilde{\psi}_i(\gamma^0) \right\|_{\Sigma} - 2 \left( \psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0) \right)' \Sigma \left[ - \left( \tilde{\psi}_{j,TH}(\theta^0) - \tilde{\psi}_j(\theta^0) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{\psi}_j(\theta^0)}{\partial \theta'} (\hat{\theta}_{TH} - \theta^0) \right] + 2 \left( \psi^0 - \tilde{\psi}_i(\gamma^0) \right)' \Sigma \left[ - \left( \tilde{\psi}_{i,TH}(\gamma^0) - \tilde{\psi}_i(\gamma^0) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\gamma^0)}{\partial \gamma'} (\hat{\gamma}_{TH} - \gamma^0) \right] + o_p(T^{-1/2}) \\ &= -\left\| \psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0) \right\|_{\Sigma} + \left\| \psi^0 - \tilde{\psi}_i(\gamma^0) \right\|_{\Sigma} - 2 \left( \psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0) \right)' \Sigma \left[ \left( \frac{\partial^2 M_{j,T}}{\partial \psi_j \partial \psi_j'} (\hat{y}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0)) \right)^{-1} \right. \\ &\quad \times \frac{\partial M_{j,T}}{\partial \psi_j} (\hat{y}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_j(\theta^0)) - \frac{\partial \tilde{\psi}_j(\theta^0)}{\partial \theta'} W(\Phi_{j,0}^*) \frac{\partial \tilde{\beta}_j'}{\partial \theta}(\theta^0) \Omega_j \left( -J_{j,0}^{-1} \sqrt{T} \frac{\partial Q_{j,T}}{\partial \beta_j}(\underline{y}_T, \beta_j^0) \right) \left. \right] \\ &\quad + 2 \left( \psi^0 - \tilde{\psi}_i(\gamma^0) \right)' \Sigma \left[ \left( \frac{\partial^2 M_{i,T}}{\partial \psi_i \partial \psi_i'} (\hat{y}_T^h(\theta^0, z_0^h), \tilde{\psi}_i(\gamma^0)) \right)^{-1} \times \frac{\partial M_{i,T}}{\partial \psi_i} (\hat{y}_T^h(\gamma^0, z_0^h), \tilde{\psi}_i(\gamma^0)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\gamma^0)}{\partial \gamma'} W(\Phi_{i,0}^*) \frac{\partial \tilde{\beta}_i'}{\partial \gamma}(\gamma^0) \Omega_i \left( -J_{i,0}^{-1} \sqrt{T} \frac{\partial Q_{i,T}}{\partial \beta_i}(\underline{y}_T, \beta_i^0) \right) \right] + o_p(T^{-1/2}) \end{aligned}$$

Sous les hypothèses (A1)-(A4),

$$\Omega = \begin{bmatrix} (-J_{j,0})^{-1} & (-J_{i,0})^{-1} & (-B_{j,0}^*)^{-1} & (-B_{i,0}^*)^{-1} \end{bmatrix} \times \left( \sqrt{T} \frac{\partial Q_T}{\partial \zeta}(\underline{y}_T, \zeta)' , \sqrt{T} \frac{\partial \tilde{M}_T}{\partial \zeta}(\hat{y}_T^h(\alpha_1^0, \alpha_2, z_0^h), \tilde{\zeta})' \right)'$$

est distribuée normalement de façon asymptotique avec une moyenne nulle et une matrice de covariance donnée par

$$\Lambda = \begin{bmatrix} J_{j,0}^{-1} I_{j,0} J_{j,0}^{-1} & J_{j,0}^{-1} I_{j,i,0} J_{i,0}^{-1} & 0 & 0 \\ J_{i,0}^{-1} I_{i,j,0} J_{j,0}^{-1} & J_{i,0}^{-1} I_{i,0} J_{i,0}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{H} B_{j,0}^{*-1} L_{j,0}^* B_{j,0}^{*-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} B_{i,0}^{*-1} L_{i,0}^* B_{i,0}^{*-1} \end{bmatrix}.$$

On cherche maintenant la variance de notre statistique de test. Pour cela on réécrit notre statistique comme

$$\text{QLR}_T(\hat{\theta}_T, \hat{\gamma}_T) = -\left\| \psi^0 - \tilde{\psi}_j(\theta^0) \right\|_{\Sigma} + \left\| \psi^0 - \tilde{\psi}_i(\gamma^0) \right\|_{\Sigma} + \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix} \Omega$$

Ceci implique que la partie gauche de (A.3) est distribuée normalement de façon asymptotique avec une moyenne nulle est une matrice de covariance donnée par  $\Phi_0^{\psi,*}(H)$

$$\Phi_0^{\psi,*}(H) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix}'$$

où

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2 \left[ (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^* \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta'} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2) W(H, \Omega_j^*) \frac{\partial \tilde{\beta}_j'}{\partial \theta} (\theta_1^0, \bar{\theta}_2) \Omega_j^* \right] \\
A_2 &= -2 \left[ (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^* \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \gamma'} (\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2) W(H, \Omega_i^*) \frac{\partial \tilde{\beta}_i'}{\partial \gamma} (\gamma_1^0, \bar{\gamma}_2) \Omega_i^* \right] \\
A_3 &= 2 (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^* \\
A_4 &= -2 (\psi^0 - \tilde{\psi}^0)' \Sigma^*
\end{aligned}$$

□

Tableau A.1: Résultats de l'estimation GMM des paramètres

Paramètres	BE	Paramètres	AGP
$\theta$	2.279 (0.1518)	$\ln(A)$	0.0048 (0.0003)
$\alpha$	0.681 (0.0313)	$\alpha$	0.4470 (0.0394)
$\bar{\delta}$	0.0182 (0.0095)	$\delta$	0.0301 (0.0069)
$\gamma$	0.0052 (0.0004)	$\alpha_n$	17.81 (7.413)
$\sigma_v$	0.0063 (0.0005)	$\beta$	0.9787 (0.0058)
$g/y$	0.2006 (0.0041)	$\phi$	2.069 (0.1998)
$\mu$	2.446 (0.3660)	$\gamma$	0.1310 (0.0223)
$\tau_g$	-0.0013 (0.00022)	$\mu_m$	0.0089 (0.0013)
$\rho$	0.9683 (0.0148)	$\rho_m$	0.7587 (0.0257)
$\sigma_\epsilon$	0.0133 (0.0018)	$\sigma_w$	0.0163 (0.0017)
$K_1$	0.2334 (0.0953)	$\sigma_v$	0.0072 (0.0003)
Test $J$ (valeur- $p$ )	5.4558 (0.1413)	Test $J$ (valeur- $p$ )	16.0269 (0.3117)

## CHAPITRE III

### LA GRANDE MODÉRATION : CHANCE OU AMÉLIORATION DE LA POLITIQUE MONÉTAIRE

#### 3.1 Introduction

Depuis que les textes de Kim et Nelson (1999) et de McConnell et Quiros (2000) ont mis en évidence la forte diminution de la volatilité de l'output et l'inflation depuis le milieu des années 1980, et surtout depuis que Stock et Watson (2003a) ont nommé cela la «grande modération», cette forte diminution des volatilités a fait l'objet de nombreuses études. En effet les volatilités de la production et de l'inflation ont fortement diminué (diminution des volatilités 1/3 et 1/2 respectivement par rapport à la période 1966-79) depuis 1984.

Pour expliquer cela, deux grands courants de pensée s'affrontent. D'un côté cela serait dû à la baisse des chocs macroéconomiques aléatoires ou «good luck», et d'un autre côté cela serait dû à des changements structurels au niveau de l'économie ainsi que des politiques monétaires suivies et/ou adoptées définies comme «good policy». Afin de valider l'une ou l'autre des explications bon nombre d'études utilisent des VAR structurels et elles concluent plutôt en faveur de «good luck». Cependant dans notre étude de la grande modération, nous utilisons un modèle standard d'équilibre général dynamique et stochastique (DSGE).

Dans le but d'analyser l'impact de la politique monétaire sur cette stabilisation économique, nous utilisons la courbe de Taylor (i.e., frontière d'efficience de la politique monétaire), qui définit la relation d'arbitrage entre la variabilité de l'inflation et de la production. La courbe de Taylor est constituée d'un ensemble de différentes combinaisons optimales réalisables entre



la variabilité de l'inflation et celle de la production, ainsi chacune des combinaisons est un choix de politique monétaire que la banque centrale peut mettre en place. C'est pourquoi, cette courbe est considérée comme un barème pour mesurer l'optimalité de la politique de la banque centrale.

Le but de notre article est d'analyser les sources de cette stabilité économique durant les dernières décennies, nous nous basons sur une version linéarisée du modèle DSGE standard utilisé par Castelnovo (2006). Pour analyser les différentes forces derrière ce changement, nous utilisons la méthodologie développée par Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006), qui permet de diviser le changement dans la performance macroéconomique en une portion qui est due au changement dans la variabilité des chocs et la partie qui peut être attribuée au changement dans l'efficacité de la politique. Pour cela nous construisons trois mesures, une pour la performance macroéconomique, une pour les changements dans l'efficacité de la politique et une pour les changements dans la variabilité des chocs d'offre.

Cependant contrairement aux études utilisant la courbe de Taylor pour analyser les forces derrière la grande modération, la nôtre se distingue par le fait que nous utilisons la méthodologie bootstrap pour prendre en compte l'incertitude entourant la courbe de Taylor, ainsi que celle des points de performance. En effet cela va nous permettre de conclure sur l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire.

Notre méthodologie est la suivante. Nous commençons par estimer un modèle DSGE à trois équations, les deux premières décrivant le cadre économique, et la troisième décrivant le comportement historique de la banque centrale (règle de Taylor). Ceci nous permet d'estimer les paramètres des 2 autres équations afin de calculer une fonction de réaction optimale pour la banque centrale. Une fois les valeurs estimées de nos paramètres obtenus, nous définissons un problème d'optimisation à la Ramsey avec une fonction de perte quadratique et où la maximisation est sujette aux contraintes données par l'équation IS dynamique et la courbe de Phillips néo-keynésienne. Une fois obtenue la fonction de réaction optimale calculée, pour des différentes valeurs du poids relatif sur la volatilité de l'output spécifié dans la fonction de perte de la banque centrale, et pour les valeurs estimées des paramètres des processus qui engendrent les

chocs exogènes, on construit la courbe de Taylor qui nous donne l'arbitrage entre la variabilité de l'inflation et la variabilité de l'output. En utilisant la méthodologie bootstrap, nous pouvons tenir compte de l'incertitude concernant l'emplacement de la courbe de Taylor due, d'une part à l'incertitude concernant les valeurs des paramètres et d'autre part à l'incertitude concernant la réalisation des chocs. Ceci nous permet ensuite d'analyser s'il y a eu un déplacement vers l'origine de la courbe de Taylor durant la grande modération, qui supporterait la conclusion que celle-ci serait due à la «chance», à une meilleure configuration des chocs exogènes et à la structure de l'économie. Nous pouvons par la suite comparer les «points de performance» (variabilités réalisées de l'inflation et de l'écart de l'output) avec les courbes de Taylor pour les deux sous-périodes (tout en tenant compte de l'incertitude concernant ces points de performance) pour voir si celle-ci s'approche d'avantage à la courbe de Taylor durant la grande modération, ce qui supporterait la conclusion que la grande modération est (en partie) due à une amélioration de la conduite de la politique monétaire.

Cette méthodologie permet de mettre en évidence plusieurs points. Premièrement l'arbitrage de la banque centrale s'est fortement amélioré durant la grande modération, ce qui se traduit par un déplacement de la courbe de Taylor vers l'origine. Le deuxième point repose sur l'utilisation du bootstrap qui nous permet de prendre en compte l'incertitude entourant la courbe de Taylor, ainsi que celles des points de performance, ce qui nous permet ainsi de montrer que la politique monétaire est devenue efficiente durant la grande modération. En effet on observe que durant la grande modération, le point de performance est sur la courbe de Taylor (dans son intervalle de confiance), ce qui nous permet de conclure que la politique monétaire est devenue efficiente. Enfin la méthodologie utilisée nous permet de conclure que la performance macroéconomique s'est améliorée, et que cette amélioration est due en grande partie (environ 62%) à l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire. Ces résultats confirment donc que la stabilité observée, est due en grande partie à l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire, et dans une moindre partie à la réduction des chocs frappant l'économie.

L'article est organisé comme suit. La deuxième section présente le modèle utilisé. La troisième section présente la politique optimale sous engagement, les données, la méthode d'estimation, ainsi que la méthodologie pour la construction de la courbe de Taylor. La quatrième

section présente les principaux résultats de l'estimation, ainsi que des mesures utilisées pour évaluer l'efficacité de la politique monétaire. Enfin la dernière section conclut.

## 3.2 Le modèle

Le modèle utilisé est un modèle standard d'équilibre général dynamique et stochastique fermé comportant des rigidités nominales sur les prix. Ce modèle est composé de trois équations qui déterminent l'équilibre du modèle ainsi que le comportement de la banque centrale.

### 3.2.1 Le cadre économique

Dans le but de construire et d'analyser la courbe de Taylor, on utilise une version linéarisée du modèle DSGE standard utilisé par (entre autres) Castelnuovo (2006). Ce modèle est composé de trois équations, les deux premières portent sur les conditions d'équilibre de l'économie alors que la dernière définit la fonction de réaction de la banque centrale. Le modèle est défini comme suit

$$x_t = (1 - \delta)x_{t-1} + \delta E_t x_{t+1} - \psi(R_t - E_t \pi_{t+1}) + \epsilon_t^x \quad (3.1)$$

$$\pi_t = (1 - \alpha)\pi_{t-1} + \alpha E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t + \epsilon_t^M \quad (3.2)$$

$$R_t = \rho_\pi \pi_t + \rho_x x_t + \epsilon_t^R, \quad (3.3)$$

où  $x_t$  et  $\pi_t$  mesurent respectivement les déviations en pourcentage de la production de l'inflation par rapport à leurs cibles<sup>1</sup>,  $R_t$  est la déviation du taux d'intérêt nominal en pourcentage,  $\epsilon_t^\pi$ ,  $\epsilon_t^x$ ,  $\epsilon_t^R$  sont des chocs structurels stochastiques *i.i.d.* avec une moyenne nulle et ayant respectivement des variances  $\sigma_{\epsilon^\pi}^2$ ,  $\sigma_{\epsilon^x}^2$ ,  $\sigma_{\epsilon^M}^2$ , et enfin où  $\delta$ ,  $\psi$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\rho_\pi$ ,  $\rho_x$  sont des paramètres du modèle.

Ainsi les deux paramètres principaux de ce modèle sont  $\kappa$  et  $\psi$ . Le premier porte sur le degré d'arbitrage entre les déviations de l'inflation et celles de la production, ou encore sur la

---

1. Notons que comme valeur cible de la production, on prend la production tendancielle déterminé au moyen d'un filtre HP, comme dans Taylor (1999); Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006). De plus, on obtient des résultats similaires lorsque l'on remplace la production tendancielle par la production potentielle du «Congressional Budget Office» comme dans Castelnuovo (2006).



transmission des effets de la politique monétaire pour stabiliser l'économie. C'est-à-dire qu'une valeur positive de  $\kappa$  implique une réduction immédiate de l'inflation suite à un choc de politique monétaire. En revanche dans le cas où cette valeur est faible, les effets du choc vont s'accroître et donc cela va impliquer un meilleur arbitrage pour la banque centrale. Le deuxième paramètre quant à lui porte sur la transmission de la politique monétaire dans l'économie. Ainsi, une valeur faible du paramètre  $\psi$  implique que l'écart de production est moins sensible aux taux d'intérêt et réduit par conséquent ces effets.

Afin de permettre une description plus intuitive des équations, il est utile de définir nos paramètres en fonction des paramètres utilisés par Castelnovo (2006) dans son modèle. Ainsi, nous avons les relations suivantes

$$\delta = \frac{1}{1+b}, \quad \psi = \frac{1-b}{\sigma(1+b)}, \quad \alpha = \frac{\beta}{1+\omega\beta}.$$

L'équation (3.1) représente la courbe IS log linéarisée qui définit la demande agrégée. Elle provient du problème intertemporel des ménages dans lequel la consommation et la détention de bons sont les variables de contrôle. Elle définit la façon dont la production courante est influencée par ses valeurs passées ou futures anticipées ainsi que par l'effet contemporain du taux d'intérêt réel. Ainsi l'écart de production contemporain est influencé de façon positive par la variation de l'écart de production passée ou future anticipée, et de façon négative par la variation du taux d'intérêt. Le paramètre  $b$  représente l'importance des habitudes externes de consommation (i.e., leurs persistance<sup>2</sup>) dans la fonction d'utilité des ménages, et le paramètre  $\sigma$  représente l'inverse de l'élasticité de substitution de la consommation des ménages à travers les périodes. Ceci implique que lorsque la valeur de  $b$  ou  $\sigma$  est faible alors les ménages sont moins poussés à lisser leur consommation, ce qui en retour rend l'écart de production plus sensible aux réactions des chocs de politique monétaires. Le paramètre  $\beta$  définit le taux d'escompte stochastique des ménages, Enfin le choc  $\epsilon_t^x$  peut être interprété comme un choc de demande, ou un choc de préférence des ménages.

---

2. Le paramètre  $b \geq 0$ . Ainsi une valeur élevée implique que les ménages ont des habitudes de consommations importantes et donc que la consommation (production) est persistante.

L'équation (3.2) représente la courbe de Phillips néo-keynésienne (NKPC) qui définit l'offre agrégée. Elle provient de l'équation d'Euler qui maximise les profits de la firme représentative en compétition monopolistique. Les firmes sont supposées fixer leur prix par un mécanisme de Calvo, c'est-à-dire qu'il y a une probabilité  $\theta$  pour que les firmes ne puissent pas ré-optimiser leurs prix à chaque période, et parmi celles qui ne peuvent pas ré-optimiser, il y a une proportion  $\omega$  qui ajuste automatiquement ses prix courants par rapport au niveau de l'inflation passée telle que,  $P_{j,t} = \pi_{t-1} P_{j,t-1}$ ,  $j$  représentant l'indice de la firme. Le paramètre mesurant le sensibilité de l'inflation due aux fluctuations de la production est  $\kappa$ , et il dépend des paramètres structurels du modèle, i.e.  $\kappa \equiv \frac{(\sigma+\eta)(1-\theta)(1-\theta\beta)}{(1+\omega\beta)\theta}$ , où  $\eta$  est l'élasticité du travail des ménages. Notons que  $\kappa$  est inversement lié à  $\theta$ , et donc lorsque les prix sont très rigides ( $\theta$  élevé), l'inflation est moins sensible aux déviations de la production. L'équation (3.2) implique donc que le niveau courant de l'inflation dépend de façon positive de l'inflation passée et future anticipée, ainsi que de l'écart de production courant. Comme cela est souligné dans la littérature<sup>3</sup>, cette spécification de la NKPC représente un élément fondamental pour la dynamique de l'inflation dans les modèles néo-keynésiens, puisqu'elle permet de prendre en compte la persistance de l'inflation dans ces modèles. Enfin le choc  $\epsilon_t^\pi$  peut être interprété comme un choc d'offre agrégée ou un choc par les coûts.

L'équation (3.3) quant à elle représente la fonction de réaction de la banque centrale. C'est-à-dire qu'elle détermine la façon dont la banque centrale va modifier son taux d'intérêt nominal suite à des déviations de l'inflation et de la production. Cette dernière contrainte est essentielle pour notre analyse puisqu'elle garantit l'existence d'une solution unique en évitant toute indétermination. En effet, comme le souligne Castelnovo (2006), sous indétermination, la courbe d'efficiencia n'a pas la forme monotone convexe décrite par Taylor (1994).

Il est important de souligner que bien que la règle monétaire que l'on utilise soit simple, elle représente une bonne approximation de la politique monétaire aussi bien dans le cas d'information parfaite que dans le cas d'incertitude. En effet, comme le soulignent Srouf (2003); Côté et al. (2002), ce genre de règles simples, se comportent mieux et sont plus performantes

---

3. Voir Schorfheide (2008); Kurmann (2005)



que les règles monétaires plus complexes.

### 3.2.2 Fonction de perte

Dans le but d'analyser le comportement de la banque centrale nous supposons qu'elle définit sa politique monétaire optimale en minimisant à chaque période  $t$  une somme pondérée escomptée des déviations de l'output et de l'inflation de leurs cibles

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i L(\pi_{t+i}, x_{t+i}), \quad (3.4)$$

où

$$L(\pi_t, x_t) = \lambda x_t^2 + (1 - \lambda) \pi_t^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (3.5)$$

où  $\beta$  est le taux d'escompte,  $0 < \beta \leq 1$ ,  $x_t$  et  $\pi_t$  mesurent respectivement les déviations en pourcentage de l'output et de l'inflation par rapport à leur cible. Quant à  $\lambda$ , il définit le poids relatif placé par la banque centrale sur les déviations de l'écart de production par rapport à celles de l'inflation. Plus la valeur de  $\lambda$  est faible, plus la banque centrale considère importante les déviations de l'inflation, le cas où  $\lambda = 0$  correspondant au cas de ciblage strict de l'inflation selon Rudebusch et Svensson (1999).

Notre fonction de perte (3.5) est celle utilisée par Srouf (2003), et est similaire à celle définie par Gertler, Galí et Clarida (1999); Woodford (2002).

### 3.3 Politique optimale sous engagement

La politique monétaire optimale est obtenue sous l'hypothèse de crédibilité parfaite et en utilisant l'algorithme développé par Dennis (2004a, 2007). Nous commençons par la politique optimale puis l'impact des chocs (une dérivation détaillée est donnée dans l'appendice A).

### 3.3.1 Équilibre du modèle

Le problème de minimisation auquel la banque centrale fait face est décrit par l'équation (3.4) sujet aux contraintes (3.1)-(3.2)<sup>4</sup>. On peut réécrire ce problème sous forme matricielle comme

$$\min_{R_t} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \mathbf{X}'_t \mathbf{Q} \mathbf{X}_t \} \quad (3.6)$$

$$\text{s.à., } \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{A}_3 R_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} x'_t & \pi'_t \end{bmatrix}'$  est le vecteur des variables endogènes,  $R_t$  est la variable de contrôle, i.e. l'instrument de la politique monétaire de la banque centrale.  $\boldsymbol{\epsilon}_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t^x & \epsilon_t^\pi \end{bmatrix}'$  est le vecteur contenant les chocs structurels du modèle.  $\mathbf{Q}$  est la matrice de poids relatifs accordée aux déviations de l'inflation et à celles de la production,  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ , et  $\mathbf{A}_3$  sont des matrices contenant les paramètres structurels des contraintes. On peut donc écrire le Lagrangien comme

$$\mathbf{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \mathbf{X}'_t \mathbf{Q} \mathbf{X}_t + 2\boldsymbol{\mu}'_t (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_t - \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{A}_3 R_t - \boldsymbol{\epsilon}_t) \}, \quad (3.8)$$

où  $\boldsymbol{\mu}_t$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé respectivement aux contraintes de la nouvelle courbe IS, et de la courbe NKPC.

Sous l'hypothèse de crédibilité parfaite de la banque centrale, Dennis (2007) montre que la solution du problème d'optimisation peut être définie par le système suivant (plus de détail est donné dans l'appendice A, et plus spécialement dans l'équation (A.12))

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_t \\ \mathbf{X}_t \\ R_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & 0 \\ \theta_{21} & \theta_{22} & 0 \\ \phi_1 & \phi_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{t-1} \\ \mathbf{X}_{t-1} \\ R_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{23} \\ \phi_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad (3.9)$$

dont la forme réduite s'écrit

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{N} \mathbf{Z}_{t-1} + \mathbf{G} \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad (3.10)$$

---

4. Il est important de souligner que pour estimer les paramètres des équations (3.1)-(3.2), nous utilisons la règle de rétroaction (3.3) car elle décrit bien le comportement de la banque centrale et parce qu'elle peut être presque optimale (Dennis, 2007).

où le vecteur  $\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} \mu_t & \mathbf{X}_t & R_t \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{N}$  est la matrice de transition dont les racines doivent être stables.<sup>5</sup>

### 3.3.2 Politique monétaire optimale et impact des chocs

Comme règle de politique monétaire optimale nous allons prendre la règle définie par Dennis (2004a) sous le nom de règle de Taylor retardée avec chocs, elle est définie par

$$R_t = \phi_1 \mu_{t-1} + \phi_2 \mathbf{X}_{t-1} + \phi_3 \epsilon_t. \quad (3.11)$$

Selon Dennis (2007) cette règle monétaire est la “plus optimale” par rapport aux règles opérationnelles utilisées par les banques centrales. Cette optimalité se fonde sur trois points. Premièrement, cette règle se base sur de l’information disponible ( $\mathbf{X}_{t-1}$ ) lors de la prise de décision de la banque centrale. Deuxièmement, elle dépend des multiplicateurs de Lagrange,  $\mu_t$ , qui représentent les coûts de la banque centrale associés au respect de son engagement. Troisièmement, comme la règle est stochastique, elle permet de prendre en compte l’effet des chocs structurels courants,  $\epsilon_t$ . Enfin, cette règle implique des pertes de bien être social plus petites.

Par ailleurs, les fonctions de réponse des variables endogènes suite aux chocs structurels peuvent être facilement obtenues à partir de la forme réduite (3.10). En effet les fonctions de réponse de  $\mathbf{Z}_t$  suite à des chocs  $\epsilon_t$  sont définies par

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_{t+h}}{\partial \epsilon_t} = \mathbf{N}^h \mathbf{G}, \quad (3.12)$$

où  $h$  est l’horizon de temps considéré.

### 3.3.3 Échantillons et données utilisés

Dans le but de mieux comprendre la grande modération, nous étudions la politique monétaire aux États-Unis durant les périodes 1966T1-1979T3 et 1982T4-2007T2. Cette subdivision est assez classique dans la littérature sur l’étude des changements de régimes observés dans les

---

5. Il s’agit de la condition de Blanchard et Kahn (1980) pour l’existence d’une solution unique.

politiques monétaires. On peut citer plus particulièrement les papiers de Clarida, Galí et Gertler (2000); Castelnovo (2006); Stock et Watson (2003b).

Ce choix de période représente les périodes avant et après l'arrivée de Volcker à la tête de la banque centrale américaine. Le choix du début de la deuxième période est principalement fondé sur l'article de Stock et Watson (2003b) qui soutiennent que l'année 1984 est la date du début de la période de grande modération dans les économies les plus développées.<sup>6</sup>

Dans notre étude nous utilisons des données trimestrielles qui ont été téléchargées à partir de la Réserve fédérale de Saint-Louis. Il s'agit du taux d'inflation trimestrielle annualisé qui est obtenu à partir du déflateur du PIB, du PIB réel pour la production, et du taux de financement fédéral effectif. Dans le but d'assurer la stationnarité des séries, les variables sont exprimées en pourcentage de déviations par rapport à leurs niveaux de long terme. Pour cela, nous avons effectué une transformation logarithmique pour la production et les prix et la différence pour le taux d'intérêt. Plus de détails sur les transformations sont données dans l'appendice B.

Il est important de souligner qu'il existe une certaine incertitude sur la valeur à retenir quant aux choix de la cible d'inflation. En effet, dans la littérature, on trouve soit une cible constante soit variable. Dans notre étude nous avons retenu comme cible le taux d'inflation de long terme (i.e., la moyenne).

### 3.3.4 Procédure d'estimation et de construction de la courbe de Taylor

Cette procédure est composée de deux étapes. Lors de la première étape nous commençons par estimer les paramètres du modèle à l'aide de l'approche Bayésienne puis nous simulons les variabilités observées et optimales de l'inflation et de la production (voir Adjemian et al., 2013, pour plus de précisions). Pour les simulations nous avons recours à la méthode des perturbations décrite dans Juillard et Ocaktan (2007).

#### **Procédure d'estimation et simulations**

---

6. Canada, France, Italie, Japon, Allemagne, Royaume-Uni et les États-Unis.



Pour cette étape nous avons utilisé le logiciel Dynare (Adjemian et al., 2013). Ce logiciel est un outil très puissant développé par Michel Julliard et son équipe. Dynare est une “toolbox” pour Matlab qui permet d’écrire les conditions d’équilibre d’un modèle DSGE de façon concise et intuitive et de trouver la solution du modèle à l’aide de la méthode des perturbations. Cette étape est constituée de trois parties.

1. Estimation des paramètres structurels du modèle,
2. calcul par simulation des variabilités réalisées de l’inflation et de la production,
3. estimation de la règle la plus optimale de la politique monétaire et calcul par simulation des variabilités optimales.

#### **Estimation des paramètres structurels**

Le modèle estimé est défini par le système d’équations linéaires (3.1)-(3.3), et il comporte neuf paramètres à estimer. Le vecteur de paramètre à estimer est le suivant  $\Theta = \{\delta, \alpha, \psi, \rho_\pi, \rho_x, \sigma_{\epsilon^x}, \sigma_{\epsilon^\pi}, \sigma_{\epsilon^R}\}$ , tandis que le taux d’escompte est fixé à  $\beta = 0.99$ . Cette estimation sera faite par l’approche Bayésienne, que nous allons brièvement décrire en se basant sur le guide de l’utilisateur de Dynare Adjemian et al. (2013).

A son niveau le plus simple, l’estimation Bayésienne est un pont entre la calibration et le maximum de vraisemblance. La calibration du modèle est représentée par la spécification des a priori. Quant au maximum de vraisemblance il est représenté par le processus d’estimation qui confronte le modèle aux données. Ainsi, les a priori peuvent être vus comme un poids sur la fonction de vraisemblance dans le but de mettre plus d’importance sur certaines surfaces du sous-ensemble des paramètres.

Premièrement, les a priori sont définis par une fonction de densité de la forme

$$p(\Theta_A | \mathbf{A}),$$

où  $\mathbf{A}$  dénote le modèle d’intérêt,  $\Theta_A$  représente les paramètres du modèle  $\mathbf{A}$ ,  $p(\cdot)$  la fonction de densité de probabilité.



Deuxièmement la fonction de vraisemblance décrit la densité des données observées, étant donné le modèle et les paramètres :

$$\mathcal{L}(\Theta_A | Y_t, A) = p(Y_t | \Theta_A, A),$$

où  $Y_T$  sont les observations jusqu'à la période  $T$ , et la vraisemblance est définie comme

$$p(Y_T | \Theta_A, A) = p(y_0 | \Theta_A, A) \prod_{t=1}^T p(y_t | Y_{t-1}, \Theta_A, A).$$

On a donc d'un côté la densité a priori  $p(\Theta)$  et de l'autre, la vraisemblance  $p(Y_T | \Theta)$ . Ce que l'on cherche est la densité a posteriori  $p(\Theta | Y_T)$ . En utilisant le théorème de Bayes deux fois on obtient la densité des paramètres sachant les données. On a généralement

$$p(\Theta | Y_T) = \frac{p(\Theta; Y_T)}{p(Y_T)}.$$

On sait aussi que

$$p(Y_T | \Theta) = \frac{p(\Theta; Y_T)}{p(\Theta)} \Leftrightarrow p(\Theta; Y_T) = p(Y_T | \Theta) \times p(\Theta).$$

En utilisant ces identités, on peut combiner la densité a priori et la fonction de vraisemblance pour obtenir la densité a posteriori

$$p(\theta_A | Y_T, A) = \frac{p(Y_T | \theta_A, A) p(\theta_A | A)}{p(Y_T | A)},$$

où  $p(Y_T | A)$  est la densité marginale des données conditionnelles au modèle

$$p(Y_T | A) = \int_{\Theta_A} p(\Theta_A; Y_T | A) d\Theta_A.$$

Finalement, le noyau a posteriori correspond au numérateur de la densité a posteriori

$$p(\Theta_A | Y_t, A) \propto p(Y_T | \Theta_A, A) p(\Theta_A | A) \equiv K(\Theta_A | Y_T, A).$$

C'est l'équation fondamentale qui nous permettra de reconstruire tous les moments d'intérêt a posteriori. La difficulté sera d'estimer la fonction de vraisemblance à partir du filtre de Kalman et ensuite de simuler le noyau a posteriori en utilisant une méthode de Monte-Carlo tel que l'algorithme de Metropolis-Hasting.

L'idée générale de l'algorithme de Metropolis-Hasting est de simuler la distribution à posteriori. C'est un «algorithme d'échantillonnage par rejet» utilisé pour générer une séquence d'échantillons (i.e., «la chaîne de Markov») à partir de la distribution qui est inconnue au début. Rappelons que tout ce que l'on connaît est le mode à posteriori ; mais on s'intéresse plutôt à la moyenne et la variance des estimateurs de  $\Theta$ . Pour faire cela, l'algorithme est construit sur le fait que sous des conditions générales la distribution des paramètres structurels sera asymptotiquement normale. Plus précisément, l'algorithme de Metropolis-Hasting implémente les étapes suivantes :

1. Choisir un point de départ  $\Theta^0$ , qui est habituellement le mode a posteriori, et effectuer une boucle sur les étapes 2, 3, et 4.
2. Tirer un  $\Theta^*$  proposé à partir de la distribution

$$J(\Theta^*|\Theta^{t-1}) = \mathcal{N}(\Theta^{t-1}, c\Sigma_m),$$

où  $\Sigma_m$  est l'inverse du Hessien calculé au mode a posteriori.

3. Calculer le ratio d'acceptation

$$r = \frac{p(\Theta^*|Y_T)}{p(\Theta^{t-1}|Y_T)} = \frac{K(\Theta|Y_T)}{K(\Theta^{t-1}|Y_T)},$$

4. Finalement on accepte ou on rejette le  $\Theta^*$  proposé selon la règle suivante, et on met à jour la distribution si nécessaire

$$\Theta^t = \begin{cases} \Theta^* & \text{avec une probabilité } \min(r, 1) \\ \Theta^{t-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans l'étape 2, on choisit un paramètre candidat,  $\Theta^*$  à partir de la distribution normale, dont la moyenne a été fixée à  $\Theta^{t-1}$ . Dans l'étape 3, on calcule la valeur du noyau a posteriori pour le paramètre candidat, et on la compare à la valeur du noyau de la moyenne de la distribution où l'on tire. Dans l'étape 4, on décide si l'on garde ou pas le paramètre candidat. Si le ratio d'acceptation est plus grand que un, alors on garde définitivement le candidat. Sinon, on reprend le candidat de la période précédente. Ensuite, on fait deux choses. On met à jour la moyenne de la distribution de notre tirage, et on note la valeur du paramètre que l'on retient. Après avoir répété ces étapes assez souvent, dans l'étape finale, on construit un histogramme

des valeurs retenues. Bien sûr, le point est que chaque intervalle ("bucket") de l'histogramme doit tendre vers zéro. Cet "histogramme lissé" sera éventuellement la distribution a posteriori après un nombre d'itération suffisante des étapes au dessus.

### **Calcul des variabilités observées de l'inflation et de l'écart de production**

On obtient les variabilités observées de l'inflation ainsi que celles de l'écart de production à partir de la méthode des simulations stochastiques avec perturbations. Pour chacune des périodes nous simulons 20,000 fois le modèle macroéconomique défini par (3.1)-(3.3), calibré avec le vecteur de paramètres estimé à l'étape précédente,  $\hat{\Theta}_i$ , et ce pour chacune des périodes. Nous obtenons ainsi une paire de variances réalisées non-conditionnelles ( $\sigma_x^2, \sigma_\pi^2$ ) par période. Ces paires seront utilisées pour déterminer le point de performance de la politique monétaire pour chacune des périodes.

### **Calcul des variabilités optimales et de la règle optimale de la politique monétaire**

Pour le calcul de la règle la plus optimale de la politique monétaire ainsi que des variabilités optimales de l'inflation et de la production, nous commençons par résoudre le problème de minimisation de la banque centrale (3.6) sujet à la contrainte (3.7). Une fois que l'on obtient  $R_t$ , on estime les paramètres de notre règle de Taylor définie par (3.11). Une fois ces paramètres obtenus on procède comme dans l'étape précédente, i.e. on simule 20,000 fois le modèle défini par les équations (3.1)-(3.2) et (3.11) (toujours avec le vecteur de paramètre estimé durant la première étape). On répète ces étapes pour chacun des niveaux de préférence de la banque centrale,  $\lambda \in [0.05 : 0.95]$  (notons que le pas d'incrément de  $\lambda$  est de 0.05). Ainsi pour chacune des valeurs de  $\lambda$  on obtient une règle monétaire optimale et un couple de volatilités optimales non-conditionnelles ( $\sigma_x^{2*}, \sigma_\pi^{2*}$ ) de l'inflation et de la production. On stocke les différents couples obtenus pour chacune des périodes. Ceci nous permet de construire la courbe de Taylor, et de déterminer à partir de notre fonction de perte (3.4), le niveau de perte associée à chacune des règles optimales de la politique monétaire.

### Estimation par bootstrap

Afin d'obtenir un intervalle de confiance pour les couples de variances réalisées non conditionnelles  $(\sigma_x^2, \sigma_\pi^2)$ , pour les couples de volatilités optimales  $(\sigma_x^{2*}, \sigma_\pi^{2*})$ , ainsi que pour la courbe de Taylor, nous effectuons une estimation par bootstrap. Plus précisément, nous construisons 1,000 échantillons par bootstrap, et pour chacun de ces échantillons nous effectuons les trois étapes décrites précédemment. Ceci nous permet d'obtenir des intervalles de confiance pour chacun de nos estimés. Ces intervalles vont nous permettre de prendre en compte l'incertitude autour de nos points de performance ainsi que celle autour de la courbe de Taylor.

#### 3.3.5 Construction de la courbe de Taylor et analyse des sources des changements de performance

Cette section se base principalement sur l'article de Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006). Nous commençons par construire la courbe de Taylor (i.e., la frontière d'efficience) pour chacune des périodes, en minimisant notre fonction de perte définie par (3.5). Plus précisément, nous calculons la fonction de réaction de la banque centrale qui minimise les pertes, sujet aux contraintes de l'économie (3.1)-(3.2). Pour une fonction de perte donnée, et pour une certaine pondération ( $\lambda$ ) sur les variabilités de l'inflation et de l'output, on peut calculer un point de la frontière d'efficience. Ensuite en prenant différentes valeurs pour le poids, on construit la frontière d'efficience. Le calcul de ces points, ainsi que de la courbe de Taylor est décrit dans la section précédente.

Comme le soulignent Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006) le but de cette analyse est d'évaluer la part des changements dans la performance macroéconomique qui provient des changements dans la variabilité des chocs par rapport à celle qui provient des changements dans l'efficience de la politique monétaire. Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006) définissent pour cela trois types de mesures : une mesure de la performance macroéconomique, une mesure



de la variabilité des chocs d'offre et une mesure d'efficience de la politique monétaire.

La première mesure est  $P_i$ , elle évalue la performance macroéconomique réalisée à chacune des périodes. Elle permet de mesurer les mouvements réalisés en dehors de la frontière d'efficience. C'est une moyenne pondérée des variabilités réalisées de l'inflation et de la production, elle est définie comme suit

$$P_i = \lambda \text{var}(x_i) + (1 - \lambda) \text{var}(\pi_i). \quad (3.13)$$

Le changement dans la performance macroéconomique est simplement le changement dans  $P$  d'une période à l'autre, c'est-à-dire

$$\Delta P_i = P_{i-1} - P_i. \quad (3.14)$$

Si  $\Delta P$  est positif cela indique un gain de performance. Il est important de noter que la valeur de  $P$  dépend du choix de  $\lambda$  (ainsi que nos autres mesures), c'est pour cela que nous analysons la sensibilité de cette (ainsi que des autres) mesure par rapport au choix de  $\lambda$  dans la section suivante.

La deuxième mesure porte sur la variabilité des chocs d'offre et mesure le niveau des chocs d'offre auquel l'économie a été confrontée. Elle permet d'évaluer les mouvements de la frontière d'efficience puisque c'est le seul choc ayant un impact sur l'arbitrage entre l'inflation et la production auquel fait face la banque centrale. Cette mesure de variabilité des chocs d'offre ( $S_i$ ), est identifiée en mesurant les changements dans la somme pondérée des volatilités optimales de l'écart de production et de l'inflation.

$$S_i = \lambda \text{var}(x_i)^* + (1 - \lambda) \text{var}(\pi_i)^*, \quad i = 1, 2, \quad (3.15)$$

où  $\text{var}(\pi_i)^*$  et  $\text{var}(y_i)^*$  représentent les variabilités de l'écart de l'inflation et de la production, pour chacune des périodes. La mesure utilisée pour mesurer le changement dans la variabilité des chocs d'offre est la suivante

$$\Delta S_i = S_i - S_{i-1}, \quad i = 1, 2. \quad (3.16)$$

Notons que  $\Delta S_i$  est défini de façon inverse par rapport à celle de  $\Delta P_i$ . Ainsi, une valeur négative de  $\Delta S_i$  implique une diminution des chocs d'offres ayant frappé l'économie.



Enfin pour déterminer l'efficacité de la politique monétaire, nous utilisons la distance entre la performance actuelle observée et la performance optimale sur la courbe d'efficacité. Ainsi, l'inefficacité de la politique monétaire ( $E_i$ ) durant la période  $i$  est donnée par

$$E_i = \lambda[\text{var}(x_i) - \text{var}(x_i)^*] + (1 - \lambda)[\text{var}(\pi_i) - \text{var}(\pi_i)^*]. \quad (3.17)$$

De par les définitions de  $P_i$  et  $S_i$  on a

$$E_i = P_i - S_i. \quad (3.18)$$

Une valeur plus petite de  $E_i$  indique que la performance actuelle observée se rapproche du niveau optimal. La variation de l'efficacité de la politique monétaire est mesurée par  $\Delta E_i = E_{i-1} - E_i$ . Ainsi une valeur positive de  $\Delta E_i$  implique une augmentation dans l'efficacité de la politique monétaire. Alors que lorsque  $\Delta E_i < 0$ , cela suggère que la politique monétaire s'est détériorée lorsque l'économie s'est éloignée de la frontière d'efficacité.

Finalement, on peut utiliser le rapport des deux composantes du changement de performance pour calculer la proportion qui peut être due à l'amélioration de la politique monétaire. La mesure utilisée est donnée par le ratio suivant :

$$Q = \frac{\Delta E}{|\Delta P|}. \quad (3.19)$$

Une valeur positive de  $Q$  implique une amélioration de l'efficacité de la politique monétaire, alors qu'une valeur négative de  $Q$  implique que la politique est devenue moins efficace. Par ailleurs, si au même moment on observe que la politique monétaire est devenue efficace et que la variabilité des chocs d'offre s'est réduite, alors  $Q$  sera entre 0 et 1 et peut donc s'interpréter comme la contribution relative d'une politique monétaire plus efficace pour la réalisation de gain de performance macroéconomique.

Pour la calibration des paramètres, nous nous sommes principalement basés sur les valeurs prises par Castelnovo (2006), ainsi que celles généralement utilisées dans la littérature suivante Rabanal (2007); Dennis (2004b); Fuhrer et Rudebusch (2004); Gaí, Gertler et Lopez-Salido (2001). Pour ce qui est de la distribution a priori des paramètres, nous nous basons principalement sur l'étude de Smets et Wouters (2003).

### 3.4 Principaux résultats et analyses

#### 3.4.1 Paramètres estimés du modèle

L'estimation des paramètres est faite suivant la méthode Bayésienne. Le tableau 3.1 présente les résultats des estimations des paramètres ainsi que leurs intervalles de confiance.

Les valeurs estimées des paramètres sont conformes à celles obtenues dans la littérature (voir Schorfheide, 2008, pour un résumé des estimés de la courbe NKPC). Cependant, on remarque qu'il y a des variations importantes d'une période à l'autre. Ces variations suggèrent un changement de comportement des agents économiques, de la politique monétaire suivie ainsi que des chocs aléatoires enregistrés. Nous allons maintenant analyser les variations de ces paramètres en détail.

On va commencer par analyser plus en détail les paramètres qui concernent l'équilibre de l'économie, c'est-à-dire les paramètres structurels de la nouvelle courbe IS ( $\delta$ ,  $\psi$ ) et ceux de la courbe de Phillips néo-keynésienne (NKPC) ( $\alpha$ ,  $\kappa$ ). On voit que les paramètres varient beaucoup à travers les périodes. En effet le paramètre  $\delta$  augmente en période calme (de facteur 1.25), et pour  $\psi$ , on observe le comportement inverse (de facteur 0.20). On observe un comportement similaire pour les paramètres  $\alpha$ , et  $\kappa$ . En effet  $\alpha$  augmente durant la deuxième période d'un facteur 1.22, alors que  $\kappa$  présente un comportement inverse, puisqu'il diminue fortement en deuxième période (de facteur 0.49) .

Si on analyse de plus près l'équation de la nouvelle courbe IS qui détermine la demande agrégée, on remarque que le coefficient estimé de la production future anticipée  $\delta$  augmente en deuxième période . En effet, il est passé de 0.392 à 0.493. Cette dynamique suggère que dans un environnement macroéconomique relativement stable (i.e., 1982T4-2007T2), la production actuelle dépend autant de son niveau passé que de son niveau futur anticipé. En revanche dans un environnement beaucoup plus volatile (i.e., 1966T1-1979T3), la production actuelle est beaucoup plus influencée par son niveau retardé. Cette persistance de la production vient du fait que les ménages ont plus tendance à lisser leur consommation durant les périodes très volatiles, ce qui est beaucoup moins le cas lors de périodes plus calmes.

Tableau 3.1: Valeurs estimées des paramètres du modèle

paramètre	périodes	
	1966T1-1979T3	1982T4-2007T2
$\delta$	0.392 [0.356 ; 0.420]	0.493 [0.471 ; 0.512]
$\alpha$	0.421 [0.399 ; 0.445]	0.513 [0.480 ; 0.542]
$\psi$	0.091 [0.064 ; 0.120]	0.018 [0.013 ; 0.023]
$\kappa$	0.041 [0.034 ; 0.049]	0.020 [0.015 ; 0.027]
$\rho_{\pi}$	1.115 [1.048 ; 1.190]	1.823 [1.709 ; 1.932]
$\rho_x$	0.423 [0.345 ; 0.504]	0.241 [0.200 ; 0.279]
$\sigma_{\epsilon x}$	0.635 [0.543 ; 0.731]	0.293 [0.249 ; 0.335]
$\sigma_{\epsilon \pi}$	0.821 [0.658 ; 0.992]	0.462 [0.400 ; 0.523]
$\sigma_{\epsilon R}$	1.638 [1.378 ; 1.909]	2.647 [2.423 ; 2.846]

Pour le paramètre  $\psi$  qui capte la sensibilité de la production courante aux variations du taux d'intérêt réel, les valeurs estimées pour deux périodes (0.091 et 0.018) sont significativement différentes de zéro. Cette diminution très importante durant la deuxième période (de facteur 5) souligne le fait que l'écart de production est devenu moins sensible aux variations du taux d'intérêt, ce qui a pour effet de réduire l'impact des effets réels des chocs monétaires sur la demande globale. Ceci peut être expliqué par deux phénomènes, d'un côté les ménages ont pu avoir plus tendance à lisser leur consommation (impact du paramètre  $b$  sur  $\psi$ , le degré de persistance des habitudes de consommation) en accordant un poids élevé à leurs habitudes externes de consommation, et de l'autre à diminuer leur élasticité de substitution (impact du paramètre  $\sigma$  qui est l'inverse de l'élasticité substitution des ménages).

Pour ce qui est de la courbe de Phillips néo-keynésienne (NKPC), la valeur estimée du paramètre  $\alpha$  est relativement stable durant les deux périodes (0.421 et 0.513). Notons que durant les deux périodes il n'est jamais statistiquement différent de 0.48. Ce résultat nous indique que

l'inflation courante est aussi sensible à son inflation passée qu'à son inflation future anticipée. Avec des attentes d'inflation future presque nulles, les firmes sont de moins en moins incitées à réviser leur prix, ce qui a pour effet de rendre les prix rigides et de réduire de façon significative l'inflation. Comme le souligne Ragan (2007), cet ancrage des attentes d'inflation est un élément fondamental pour le succès de la politique monétaire. Cette réduction du coefficient de l'inflation retardée ( $1 - \alpha$ ), confirme la baisse de la persistance de l'inflation, cependant cette baisse est beaucoup plus faible que celle observée pour les pays sous le régime de ciblage d'inflation (Benati et Surico, 2008).

En ce qui concerne l'élasticité de l'inflation par rapport à l'écart de production,  $\kappa$  (0.041, et 0.02), elle est significativement positive pour les deux périodes et comprise à 95% de confiance entre 0.015 et 0.05, ce qui est cohérent avec la littérature (Galí et Gertler, 1999; Schorfheide, 2008). Ces valeurs positives de  $\kappa$  impliquent une baisse immédiate de l'inflation à la suite d'un choc de politique monétaire. On constate que la baisse de  $\kappa$  entre les deux premières périodes est d'environ 2 fois. Cette diminution significative a pour conséquence une augmentation de la stabilité des prix ainsi que la diminution des pressions inflationnistes de par le fait que l'inflation devient de moins en moins sensible aux déviations de la production. Ceci contribue d'une part à l'amélioration de l'arbitrage auquel la banque centrale est confrontée, mais d'autre part, implique une augmentation des effets réels des chocs de politique monétaire par un ajustement moins rapide de la production à son niveau potentiel.

Il est important de noter que la valeur très faible de  $\kappa$  dans la deuxième période implique que l'inflation est beaucoup moins sensible aux fluctuations de la production, ce qui a pour conséquence une stabilité accrue des prix de par le non-ajustement fréquent des prix par les firmes. Ceci offre un arbitrage favorable à la banque centrale, puisque une forte déviation de la production n'a qu'un impact très faible sur le niveau d'inflation. Ainsi cette amélioration de l'arbitrage avec en plus une persistance de l'inflation peu élevée ainsi qu'un engagement plus fort de la banque centrale à lutter contre l'inflation ont eu pour effet d'améliorer les efforts de la politique monétaire suivie en augmentant ses effets avec comme résultat une forte réduction de l'inflation à partir des années 80 et la stabilisation macroéconomique.



En ce qui concerne les paramètres reliés à la politique monétaire, soit les paramètres  $\rho_\pi$  et  $\rho_x$  définissant les degrés de réaction du taux d'intérêt nominal aux déviations de l'inflation et à celles de la production. Les coefficients estimés sont significatifs et conformes au principe de Taylor tel que  $\rho_\pi > 1$  et  $\rho_x > 0$ . Ces valeurs confirment que la banque centrale (FED) a suivi une politique monétaire agressive et stabilisatrice étant donné que le taux d'intérêt nominal réagit plus que proportionnellement aux déviations de l'inflation par rapport à sa cible et fortement aux fluctuations (surtout dans la première période) de la production par rapport à son niveau potentiel. Selon les termes de Clarida, Galí et Gertler (2000), il s'agit donc d'une politique monétaire «active» et «non accommodante» à l'inflation à travers les deux périodes.

Il est important de noter que l'action de la politique monétaire sur l'inflation est devenue beaucoup «plus agressive» dans la deuxième période, ce qui montre bien l'intérêt de la banque centrale à diminuer l'inflation. Ceci a eu pour conséquence d'être plus tolérant sur les variations de la production en diminuant son agressivité à son égard.

Enfin nous analysons les paramètres relatifs aux chocs exogènes du modèle mesurés par les trois déviations standard  $\{\sigma_{\epsilon x}, \sigma_{\epsilon \pi}, \sigma_{\epsilon R}\}$  pour le choc de demande, le choc d'offre ainsi que le choc de politique monétaire, respectivement. La dynamique observée des différents chocs n'est pas similaire. En effet la volatilité des chocs de demande et d'offre diminue très fortement durant la deuxième période. En revanche la volatilité des chocs monétaires augmente fortement durant la deuxième période. Les variations en proportion de la première période sont respectivement de 0.46 pour les chocs de demande, de 0.56 pour les chocs d'offre et de 1.62 pour les chocs monétaires.

La réduction des volatilités des chocs de demandes et des chocs d'offres durant la deuxième période souligne la baisse des perturbations aléatoires enregistrées depuis les années 1980, impliquant un environnement macroéconomique plus stable. Cette diminution améliore la conjoncture économique, ce qui a un impact réel sur la politique de stabilisation de la production par la banque centrale, en améliorant l'arbitrage auquel la banque centrale doit faire face, impliquant des effets positifs sur le niveau d'inflation, les décisions de consommations et d'investissements.



Les résultats concernant le choc de politique monétaire sont bien différents, celui-ci ayant presque doublé durant la deuxième période. Cette augmentation peut s'expliquer par le fait que la banque centrale a eu recours à une politique monétaire "plus agressive" durant la deuxième période (comme le montre  $\rho_\pi$ ).

### 3.4.2 Analyse de l'efficience de la politique monétaire optimale

Pour analyser l'efficience de la politique monétaire de la banque centrale, on étudiera les mouvements des points de performance et de la courbe de Taylor (frontière d'efficience) ainsi que leurs positions. Pour cela une politique est dite efficiente lorsque les points de performance et les courbes d'efficience se rapprochent de l'origine (Walsh, 1998).

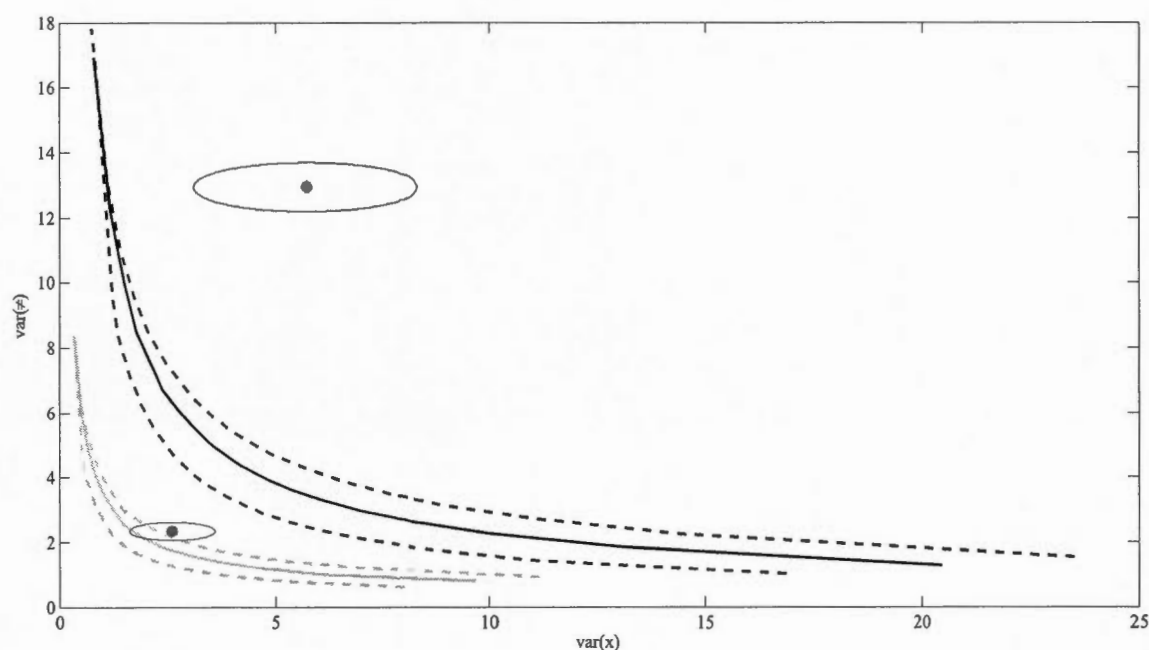
En effet comme le soulignent Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006), une augmentation ou une diminution de la variabilité des chocs d'offre bouge cette frontière, alors que les mouvements qui rapprochent ou éloignent les points de performance de cet arbitrage proviennent de l'amélioration ou du déclin de l'efficience de la politique monétaire.

La figure 3.1 montre les différents points de performance ainsi que les courbes d'efficience pour chacune des périodes. La figure fait ressortir deux caractéristiques importantes. La première porte sur la convexité des courbes et sur la pente négative qui implique la présence d'un arbitrage de long terme entre la volatilité de l'inflation et celle de la production. Ce résultat indique (comme le souligne Castelnovo, 2006), un régime de politique monétaire "actif" ou "agressif", par opposition à celles observées dans un régime monétaire passif.

En regardant les pentes des courbes, on remarque un aplatissement entre les deux périodes, ce qui implique un coût de substitution plus faible entre les variabilités de l'inflation et celles de la production, ce qui en retour améliore le degré d'arbitrage de la banque centrale. En effet, celle-ci permet de réduire les déviations de l'inflation par une hausse moins importante des déviations de la production.

La deuxième caractéristique porte sur les deux types de mouvement observés : le déplacement du point de performance vers sa frontière d'efficience et le glissement de cette dernière

Figure 3.1: Points de performances et frontières d'efficacité de la politique monétaire pour les trois sous-périodes



vers l'origine. Ceci nous indique que l'arbitrage de la banque centrale s'est grandement amélioré pendant la grande modération. En effet sous la grande modération (1982T4-2007T2), le point de performance s'est déplacé vers sa courbe d'efficacité qui elle-même s'est déplacé vers l'origine. Ceci a eu pour effet de réduire de façon simultanée les volatilités de l'inflation et de la production. De plus l'estimation par bootstrap nous permet de voir que la politique monétaire a été efficiente durant la grande modération, puisque le point de performance est dans l'intervalle de confiance de la courbe de Taylor, contrairement à la première période. Ainsi le graphique nous permet de conclure que la politique monétaire de la banque centrale est devenue efficiente.

Dans le but de quantifier l'amplitude et la nature des forces dirigeant les différents mouvements observés, on utilise trois mesures de variations suggérées par Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006), qui portent sur la performance macroéconomique, la variabilité des

chocs d'offre et sur l'efficacité de la politique monétaire. Le tableau 3.2 présente ces mesures pour les mouvements enregistrés sur les points de performance et les courbes de Taylor entre les périodes.

Tableau 3.2: Mesures de glissement des points de performance et des frontières d'efficacité

périodes			variations (changements)	
1. Mesure de performance macroéconomique				
$\lambda$	$P_1$	$P_2$	$\Delta P_2$	$\% \Delta P_2$
0.20	8.36	2.57	5.79	73.0
0.25	7.98	2.55	5.43	68.0
0.50	7.10	2.48	4.62	65.1
0.75	6.22	2.41	3.81	61.3
2. Mesure de la frontière d'efficience (ou de variabilité des chocs d'offre)				
$\lambda$	$S_1$	$S_2$	$\Delta S_2$	$\Delta S_i < 0$
0.20	3.74	1.86	-1.88	moins de chocs
0.25	3.97	1.95	-2.02	perturbant
0.50	4.27	2.03	-2.23	l'économie
0.75	3.47	1.64	-1.83	
3. Mesure d'efficience de la politique monétaire				
$\lambda$	$E_1$	$E_2$	$\Delta E_2$	
0.20	4.62	0.71	3.91	La politique monétaire :
0.25	4.01	0.60	3.41	$-\Delta E_i > 0$ : $\uparrow$ efficience
0.50	2.83	0.45	2.39	$-\Delta E_i < 0$ : se détériore
0.75	2.75	0.77	1.98	
4. Ratio de performance macroéconomique due à la politique monétaire				
$\lambda$			$Q_2$	
0.20			0.68	La politique monétaire devient :
0.25			0.63	$-Q_i > 0$ : efficiente
0.50			0.52	$-Q_i < 0$ : moins efficiente
0.75			0.52	

L'analyse du tableau montre une relation négative entre l'efficacité de la politique monétaire et l'ampleur des chocs d'offre. En effet durant la grande modération (1982T4-2007T1) où l'intensité des chocs d'offre diminue ( $\Delta S_2 \leq -1.83$ ), l'amélioration de la performance est élevée ( $\% \Delta P_2 \geq 61.3$ ). On note aussi une amélioration de l'efficacité de la politique monétaire ( $\Delta E_2 \geq 1.98$ ), ce qui explique une partie importante ( $Q_2 \geq 52\%$ ) de la performance macroéconomique réalisée.

Il est important de noter comme le soulignent Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006), que nos résultats dépendent du choix de  $\lambda$ , on peut l'estimer ou prendre une valeur plausible dans la littérature voir (Cecchetti et Ehrmann, 2002; Dennis, 2001). En plus de présenter nos résultats pour des valeurs comprises entre .25 et .75, nous donnons aussi les résultats pour un  $\lambda = .20$  (ce qui correspond à la valeur choisie par Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006)). On voit que pour cette valeur les résultats sont encore meilleurs, puisque l'amélioration de la performance est encore plus élevée, de l'ordre de 73%, la diminution des chocs d'offres semble un peu moins élevée, alors que l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire est encore plus élevée. Et donc ceci implique que l'amélioration de la performance macroéconomique due à la politique monétaire est encore plus élevée, de l'ordre de 68%. Ceci permet donc de confirmer la robustesse des résultats.

### 3.4.3 Analyse de l'efficacité de la politique monétaire optimale

On mesure l'efficacité de la politique monétaire par rapport aux pertes de bien-être social occasionnées par la banque centrale, sachant que son objectif est de minimiser les pertes liées aux déviations de la production et de l'inflation de leurs valeurs cibles. Dans notre cas nous allons comparer les fonctions de perte des deux périodes étant donné qu'une politique monétaire efficace est celle qui occasionne le moins de pertes.

Pour cela, on suppose que le taux de préférences relatif de la banque centrale est inconnu, on a donc  $\lambda \in [0.05, 0.95]$  (avec un incrément de 0.05). Ceci permet de ne pas avoir à estimer ce paramètre, ce qui peut s'avérer difficile et parfois incertain<sup>7</sup>. Pour cela, nous avons utilisé

---

7. En effet dans leur étude Cecchetti et al. (2006) imposent un taux de préférence relatif pour l'aversion aux



les couples de variances  $(\sigma_x^2, \sigma_\pi^2)$  calculés pour construire la courbe de Taylor (présenté dans le tableau C.3) pour chaque  $\lambda$ , puis nous avons calculé les pertes associées pour chaque période à partir de l'équation (3.5).

La figure 3.2<sup>8</sup> nous permet de mettre en évidence l'existence d'une relation positive entre le degré d'arbitrage auquel la banque centrale est confrontée et les pertes résultantes de sa politique monétaire. Ainsi plus l'arbitrage de la banque centrale entre la variabilité de l'inflation et celle de la production s'améliore, plus les pertes associées sont faibles et plus celles-ci sont proches de leur niveau optimal. Ainsi, durant la grande modération (1982T4-2007T2) la réduction des pertes réalisées est de 80% en moyenne (i.e. peu importe le degré d'aversion relative de la banque centrale).

Notons aussi que l'impact du degré d'agressivité de la politique monétaire semble plus important en période agitée que durant les périodes plus calmes. Cependant en regardant de plus près nous voyons que le niveau de préférence de la banque centrale qui est le plus efficace a changé au cours des périodes. En effet, durant la première période, le taux de préférence le plus optimal était  $\lambda = .50$ , alors que durant la grande modération ce taux passe à 0.25.

#### 3.4.4 Règle optimale de politique monétaire

Nous allons maintenant examiner la structure des règles optimales de la politique monétaire ainsi que leur efficacité dans la réduction des pertes réalisées. Le tableau 3.3 montre les différentes règles optimales calculées en fonction des trois taux de préférences de la banque centrale par rapport aux déviations de la production,  $\lambda \equiv (0.25, 0.50, 0.75)$ , respectivement associées au cas où elle conduirait une politique de ciblage d'inflation, une politique neutre, ou de ciblage de la production.

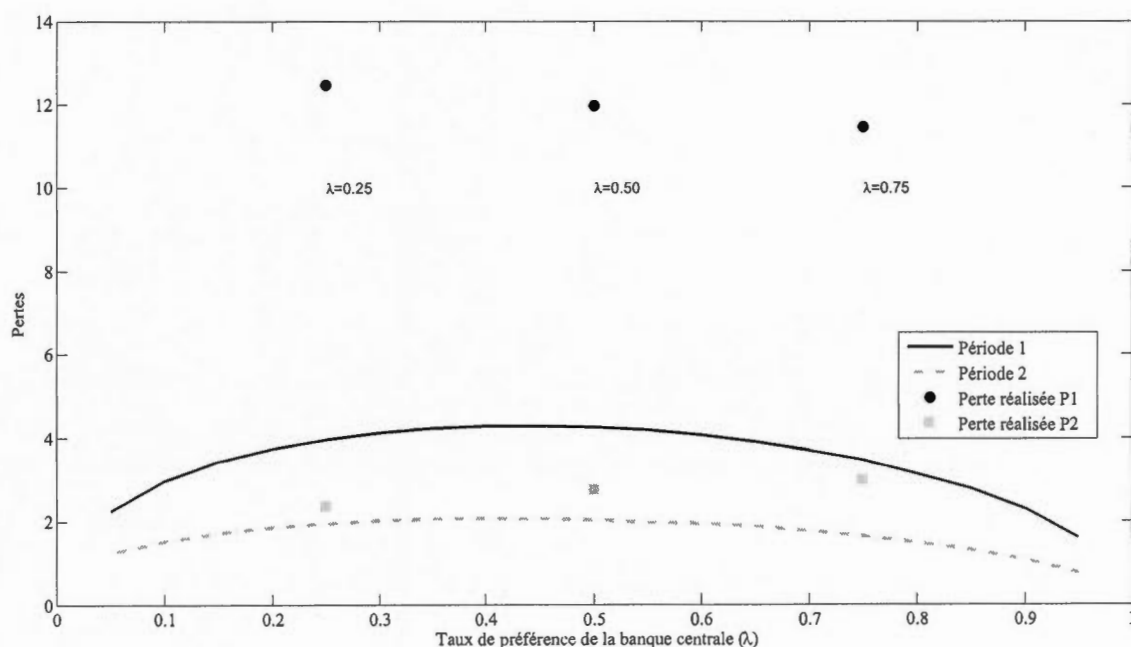
---

déviations de l'inflation de 0.80 ( $\lambda = 0.20$ ). En revanche dans son étude Srouf (2003) souligne le fait que ceci est très incertain et montre que les taux de préférence relatifs estimés ne reflètent que rarement le comportement des banques centrales, et donc suggère de supposer ce taux inconnu.

8. Les pertes mesurés sur l'axe des ordonnées sont obtenues par l'équation (3.5).



Figure 3.2: Mesures de glissement des points de performance et des frontières d'efficience



Les résultats présentés dans le tableau 3.3 montrent que certains choix de la banque centrale sont plus efficaces que d'autres dans leur effet à réduire les pertes de bien-être social. Lorsque l'on compare les pertes réalisées par rapport à leur niveau optimal, on observe trois points importants dans les règles optimales observées.

Premièrement, dans la première période la règle monétaire qui cible l'inflation autant que la production ( $\lambda = 0.50$ ) est optimale alors que durant la deuxième période c'est la règle monétaire qui cible l'inflation qui est la plus efficace. En effet durant la deuxième période, cette politique est celle qui permet d'obtenir le meilleur rapport de perte, c'est-à-dire que les pertes réalisées sont celles qui sont le plus proches de leur niveau optimal et donc procure le niveau de bien-être social le plus élevé. Plus précisément, la sous-performance (ratio de 2.80) réalisée lors de la première période s'explique par le fait que durant cette période, l'économie américaine faisait face à un niveau élevé d'inflation. En effet l'inflation entraîne une dispersion des prix

Tableau 3.3: Règles optimales de politique monétaire vs taux de préférence de la banque centrale

$$(R_t = \vartheta_\pi \pi_{t-1} + \vartheta_x x_{t-1} + \gamma_1 \epsilon_t^\pi + \gamma_2 \epsilon_t^x)$$

sous période	$\lambda$	paramètres				pertes		
		$\vartheta_\pi$	$\vartheta_x$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	optimales	réalisée	rapport
1966T1-1979T3	0.25	8.73	5.65	10.32	14.45	3.97	12.47	3.14
	0.50	7.17	7.01	9.85	10.24	4.26	11.95	2.80
	0.75	7.12	12.18	10.17	9.09	3.46	11.45	3.30
1984T1-2007T2	0.25	7.02	3.17	49.96	24.55	1.94	2.35	1.21
	0.50	2.87	1.92	49.96	20.27	2.03	2.76	1.36
	0.75	9.13	12.99	47.56	26.19	1.64	2.98	1.81

et des salaires ainsi que des fluctuations dans les taux de marges des firmes, lesquelles ont des effets nuisibles et coûteux sur les décisions des agents économiques.

Le deuxième point porte sur le degré de sensibilité du taux d'intérêt nominal aux déviations des différentes variables endogènes. De manière générale, on observe que la banque centrale réagit plus fortement aux déviations de l'inflation qu'à celles de la production. En effet, lorsque la banque centrale réagit plus fortement aux déviations de la production plutôt qu'à celles de l'inflation ( $\vartheta_\pi < \vartheta_x$ ), les pertes réalisées sont toujours les plus élevées, ce qui signifie une baisse de l'efficacité de la politique monétaire. Cette baisse d'efficacité peut s'expliquer selon Ragan (2007), par le fait que la production n'est pas une variable sur laquelle les actions de banque centrale peuvent avoir un effet systématique et durable. Ce résultat met en avant le choix du ciblage de l'inflation par la plupart des banques centrales dans les pays développés. En effet lorsque la banque centrale s'engage à répondre de façon efficace à toute déviation de

l'inflation par rapport à sa cible, cela a pour impact de stabiliser la production.

Le dernier point concerne l'importance que la règle optimale réponde aux chocs exogènes. On voit que la banque centrale réagit fortement aux chocs d'offre et de demande. Ceci vient du fait que la maîtrise des chocs de demande permet de garder la production près de son niveau potentiel, alors que la maîtrise des chocs d'offre stabilise les prix et ainsi améliore l'arbitrage entre la variabilité de l'inflation et de la production. En effet de par l'incertitude de leur réalisation, ces chocs sont très importants pour la conduite de la politique monétaire. En effet les chocs de demande font fluctuer la demande globale et entraînent, comme les chocs d'offre, une dérive des prix. Donc, une meilleure anticipation et une bonne maîtrise de ces chocs permettent de stabiliser la production et les prix et donc d'accroître le bien être. En effet comme le souligne Dennis (2004a), une réponse non adéquate de la banque centrale due à une mauvaise appréciation de ces chocs implique des effets négatifs et donc une hausse des pertes.

### 3.4.5 Dynamique des variables macroéconomiques : inflation, production et taux d'intérêt nominal

Nous allons maintenant analyser la façon dont les trois principales variables macroéconomiques, qui sont l'inflation, l'écart de la production et le taux d'intérêt se comportent suite à un choc aléatoire de demande, d'offre et monétaire. Ce comportement va permettre à la banque centrale de savoir comment se comportent les variables de contrôle, ainsi que de déterminer l'horizon nécessaire à la transmission des chocs structurels sur l'économie et aussi de maîtriser la durée nécessaire pour stabiliser ces variables à leur niveau d'équilibre.

Les figures D.1a à D.2c présentent les différents sentiers de réponse suite aux différents chocs structurels. Pour cela nous avons eu recours à l'approche utilisée par Schorfheide (2008) qui détermine les valeurs de pointe ainsi que les horizons pour les trois périodes. Le tableau 3.4 donne l'intensité des effets de ces chocs, leur horizon maximal, ainsi que la durée nécessaire pour la stabilisation.

Les résultats obtenus sont conformes à la littérature macroéconomique (Galí, 2008; Boi-

vin et Giannoni, 2006) et nous permettent de conclure que le modèle est à même de reproduire les réponses de ces variables macroéconomiques. On note premièrement que durant la grande modération les effets des chocs se réduisent, ainsi que la durée pour que les variables retournent à leur état stationnaire. Deuxièmement on note que leurs délais de transmission restent presque identiques durant les deux périodes.

Tableau 3.4: Fonction de réponses relatives à un choc structurel

Choc	sous période	Taux d'intérêt			Inflation			Production		
		peak	h	d	peak	h	d	peak	h	d
Demande	S1	170.00	0	19	35.00	1	19	293.00	0	5
	S2	89.00	0	5	11.00	0	5	160.00	0	4
Offre	S1	344.00	0	17	303.00	0	20	-60.00	1	20
	S2	185.00	0	7	111.00	0	6	-35.00	0	6
Monétaire	S1	160.00	0	8	-3.00	1	13	-22.00	0	5
	S2	414.00	0	5	-4.00	0	6	-60.00	0	4

Plus précisément lorsque l'on regarde de plus près on remarque que les chocs de demande et d'offre ont un plus petit impact sur l'output, l'inflation et le taux d'intérêt durant la grande modération. Ce résultat nous indique que la politique monétaire a mieux réussi à modérer les effets des chocs exogènes depuis le début des années 1980, en répondant plus fermement et de façon systématique aux fluctuations des conditions économiques (ce qui rejoint les résultats de Clarida, Gali et Gertler, 2000).

Ces résultats semblent confirmer le fait que les réponses de l'output, de l'inflation et du taux d'intérêt sont beaucoup moins prononcées durant la deuxième période que durant la première. En effet la réponse suite aux chocs de demande est en moyenne deux fois moins élevée. La même chose s'observe aussi pour les chocs d'offre. Ceci semble confirmer que la conduite de la politique monétaire durant cette période stabilise l'inflation, la production ainsi que le taux d'intérêt suite aux chocs d'offre et de demande.

Il faut aussi souligner que la durée de leur impact a fortement diminué (presque divisée par trois). Ainsi le temps de retour à leur valeur d'équilibre est passé de plus de 15 trimestres à moins de 7 trimestres. Tous ces changements ont eu pour effet d'accélérer la stabilisation macroéconomique ainsi que d'améliorer la politique monétaire en la rendant de plus en plus souple et efficace.

Tous ces résultats nous permettent de conclure que la politique monétaire a été de manière générale plus stabilisatrice depuis le début des années 80.

### 3.5 Conclusion

Dans le but d'analyser l'impact de la politique monétaire sur la stabilisation économique, nous avons utilisé la courbe de Taylor. En effet cette courbe est considérée comme un barème pour évaluer l'optimalité de la politique de la banque centrale. Pour cela nous utilisons l'estimation Bayésienne pour estimer une version linéarisée du modèle DSGE standard utilisé par Castelnuovo (2006). De plus nous nous appuyons sur la méthodologie développée par Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006), qui permet de diviser le changement dans la performance macroéconomique en une portion due au changement dans la variabilité des chocs et la partie qui peut être attribuée au changement dans l'efficacité de la politique. Pour cela nous construisons trois mesures, une pour la performance macroéconomique, une pour les changements dans l'efficacité de la politique et une pour les changements dans la variabilité des chocs d'offre.

Il est important de souligner que contrairement aux études utilisant la courbe de Taylor pour analyser les forces derrière la grande modération, la nôtre se distingue par le fait que nous utilisons la méthodologie bootstrap pour prendre en compte l'incertitude entourant la courbe de



Taylor, ainsi que celle des points de performances.

Notre étude nous permet de faire ressortir quelques résultats intéressants sur la conduite de la politique monétaire. Premièrement nous observons que les niveaux de performance de la politique monétaire se sont déplacés vers les courbes d'efficience qui se sont elles-mêmes déplacées vers l'origine. Ceci nous permet de conclure que lorsque la performance de la politique monétaire se déplace vers l'origine, nous observons une amélioration de l'efficacité de la politique monétaire, ce qui se traduit par une diminution des pertes sociales. Deuxièmement, nos résultats montrent que la performance macroéconomique s'est améliorée, et que cette amélioration est due en grande partie (environ 62%) à l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire.

Ces résultats confirment donc que la stabilité économique observée, est due en grande partie à l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire, et dans une moindre partie à la réduction des chocs frappant l'économie. Il est aussi important de souligner que cette amélioration de la politique monétaire, est due en grande partie au fait que la banque centrale a mené une politique monétaire active et crédible basée sur le ciblage de l'inflation durant la grande modération.

Enfin, notre étude souligne l'importance de la politique monétaire, sur le bien-être social, et donc de l'importance de continuer à essayer de mieux la comprendre. Dans ce but il pourrait être intéressant d'étendre notre étude, à d'autres règles de Taylor, comme celles utilisées par Dennis (2007), ainsi que pour d'autres modèles DSGE plus raffinés.

## APPENDICE A

### SOLUTION DU MODÈLE

Le problème de minimisation auquel la banque centrale fait face est le suivant

$$\min_{R_t} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\lambda x_t^2 + (1 - \lambda) \pi_t^2], \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{A.1})$$

sujet à :

$$x_t = (1 - \delta)x_{t-1} + \delta E_t x_{t+1} - \psi(R_t - E_t \pi_{t+1}) + \epsilon_t^x \quad (\text{A.2})$$

$$\pi_t = (1 - \alpha)\pi_{t-1} + \alpha E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t + \epsilon_t^\pi \quad (\text{A.3})$$

On peut réécrire ce problème d'optimisation dynamique sous forme matricielle comme suit :

$$\min E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \mathbf{X}_t' \mathbf{Q} \mathbf{X}_t \} \quad (\text{A.4})$$

$$\text{s.à, } \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{A}_3 R_t + \epsilon_t \quad (\text{A.5})$$

où  $\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} x_t' & \pi_t' \end{bmatrix}'$  est le vecteur des variables endogènes ;  $R_t$  est la variable de contrôle, i.e. l'instrument de politique monétaire de la banque centrale ; et  $\epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t^x & \epsilon_t^\pi \end{bmatrix}' \sim \text{i.i.d.}[0, \Omega]$  est

le vecteur des chocs structurels du modèle ;  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (1 - \lambda) \end{bmatrix}$  est la matrice de préférence de la banque centrale par rapport aux déviations de l'inflation. Enfin les matrices  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$  et  $\mathbf{A}_4$  contiennent les paramètres structurels du modèle, et sont définis comme suit

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} (1 - \delta) & 0 \\ 0 & (1 - \alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \delta & \psi \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -\psi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le Lagrangien est donc

$$L(\cdot) = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \mathbf{X}_t' \mathbf{Q} \mathbf{X}_t + 2\mu_t (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_t - \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} - \mathbf{A}_2 E_t \mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{A}_3 \mathbf{R}_t - \epsilon_t) \}. \quad (\text{A.6})$$

Sous l'hypothèse d'engagement de la banque centrale, les conditions de première ordre par rapport à  $\mathbf{X}_t$ ,  $\mathbf{R}_t$  et  $\mu_t$  sont

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{X}_t} = \mathbf{Q} \mathbf{X}_t - \beta^{-1} \mathbf{A}_2 \mu_{t-1} + \mathbf{A}_0 \mu_t - \beta \mathbf{A}_1 E_t \mu_{t+1} = \mathbf{0}, \quad t > 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mu_t} = \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_t - \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} - \mathbf{A}_2 E_t \mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{A}_3 \mathbf{R}_t - \epsilon_t = \mathbf{0}, \quad t > 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{R}_t} = -\mu_t = \mathbf{0}, \quad t > 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{X}_t} = \mathbf{Q} \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_0 \mu_t = \mathbf{0}, \quad t = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \mathbf{R}_t} = -\mathbf{A}_3 \mu_t = \mathbf{0}, \quad t = 0 \quad (\text{A.11})$$

Il est intéressant de noter que l'équation (A.11), implique  $\mu_t = 0$  pour  $t = 0$ . Cela signifie donc que le coût supporté par la banque centrale lors de la mise en place de sa politique monétaire sous engagement (au temps  $t = 0$ ) est nul. On peut représenter les équations (A.7)- (A.9) sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t \\ \mathbf{X}_t \\ \mathbf{R}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \mathbf{X}_{t-1} \\ \mathbf{R}_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} E_t \begin{bmatrix} \mu_{t+1} \\ \mathbf{X}_{t+1} \\ \mathbf{R}_{t+1} \end{bmatrix} + \epsilon_t \quad (\text{A.12})$$

La forme canonique de ce système d'équations est

$$\Gamma_0 \mathbf{Z}_t = \Gamma_1 \mathbf{Z}_{t-1} + \Gamma_2 E_t \mathbf{Z}_{t+1} + \epsilon_t \quad (\text{A.13})$$

où  $\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} \mu_t & \mathbf{X}_t & \mathbf{R}_t \end{bmatrix}$  est le vecteur des variables endogènes ;  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$ , et  $\Gamma_2$  sont des matrices obéissant à certaines conditions. Ainsi  $\Gamma_0$  doit être positive définie et inversible. Ce système d'anticipation rationnelle peut être résolu par la méthode de coefficients indéterminés. Après résolution on obtient la loi de mouvement suivante :

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{N} \mathbf{Z}_{t-1} + \mathbf{G} \epsilon_t \quad (\text{A.14})$$

où  $N$  est la matrice de transition dont les racines doivent être stables <sup>1</sup>

---

1. Il s'agit de la condition de Blanchard et Kahn (1980) pour l'existence d'une solution unique.

## APPENDICE B

### SOURCES ET DESCRIPTION DES DONNÉES

Les données utilisées sont trimestrielles et elles ont été téléchargées à partir de la réserve fédérale de Saint-Louis.

Variable	Numéros de série	Description
PIB réel ( $y$ )	GDPC96	Produit intérieur brut en millions de dollars, dollars enchaînés (2005), désaisonnalisés au taux annuel (trimestriel).
Niveau des prix ( $p$ )	GDPDEF	Déflateur implicite des prix (indice égale 100 en 2005), désaisonnalisées au taux annuel (trimestriel).
Taux d'intérêt ( $R$ )	FEDFUNDS	Taux de financement fédérale effectif (mensuel).

Dans le but de n'avoir que des variables stationnaires, nous avons effectué certaines transformations. Nous avons pris le logarithme de la production et des prix. Ensuite, nous avons pris chacune des variables en déviation par rapport à leurs valeurs cibles. Les transformations sont les suivantes :

– On définit l'écart de production comme suit

$$x_t = 100 \times (\log y_t - \log y^*),$$

où  $y_t$  est le PIB réel et  $y^*$  est le PIB de long terme défini à l'aide du filtre Hodrick-Prescott avec le facteur de lissage ( $\lambda = 1600$ ) correspondant aux données trimes-



trielles.

- Le taux d'inflation est

$$\pi_t = \pi_t^p - \pi_t^*,$$

où  $\pi_t^p = 100 \times (\log p_t - \log p_{t-1})$  est le taux d'inflation en pourcentage défini comme la variation en pourcentage d'une année à l'autre du déflateur implicite des prix.  $\pi_t^*$  est la cible d'inflation de la banque centrale. Dans notre cas, cette cible est définie comme le taux d'inflation de long terme.

- Le taux d'intérêt est défini comme suit

$$R_t = R_t^c - R_t^*,$$

où  $R_t^c$  est le taux de financement effectif fédéral, et  $R_t^*$  est le taux d'intérêt d'équilibre de long terme. Dans notre étude, ce taux est constant, et est déduit de la relation suivante

$$\beta = \frac{1}{1 + R^*},$$

où  $R^* = 1.01$ , pour  $\beta = 0.99$ .

## APPENDICE C

### TABLEAUX

Tableau C.1: Définition des paramètres du modèle linéaire

Paramètre	déscription
$\beta$	taux d'escompte des ménages
$\lambda$	poids relatif accordé aux déviations de la production par rapport à celles de l'inflation
$\delta$	degré de sensibilité de l'écart de production courante par rapport à son niveau futur anticipé
$\alpha$	degré de sensibilité de l'inflation courante par rapport à son niveau futur anticipé
$\psi$	élasticité de l'écart de production courante aux taux d'intérêt réel
$\kappa$	élasticité de l'inflation à l'écart de production
$\rho_\pi$	degré de réaction du taux d'intérêt nominal aux déviations de l'inflation
$\rho_x$	degré de réaction du taux d'intérêt nominal à l'écart de production
$\sigma_{\epsilon_x}$	écart-type du choc de demande
$\sigma_{\epsilon_\pi}$	écart-type du choc d'offre
$\sigma_{\epsilon_R}$	écart-type du choc monétaire

Tableau C.2: Distribution à priori des paramètres du modèle

Paramètre	domaine	fonction de densité	Valeur à priori	
			moyenne	déviations standard
$\delta$	$[0.0, 1.0]$	beta	0.40	0.10
$\alpha$	$[0.0, 1.0]$	beta	0.65	0.10
$\psi$	$[0, +\infty[$	gamma	0.24	0.10
$\kappa$	$[0, +\infty[$	gamma	0.13	0.05
$\rho_\pi$	$]1.0, 2.0[$	normal	1.50	0.20
$\rho_x$	$]0.0, 1.0]$	normal	0.50	0.10
$\sigma_{\epsilon_z}$	$\mathbb{R}^+$	inverse gamma	0.46	2.00
$\sigma_{\epsilon_\pi}$	$\mathbb{R}^+$	inverse gamma	1.09	2.00
$\sigma_{\epsilon_R}$	$\mathbb{R}^+$	inverse gamma	0.49	2.00

Tableau C.3: Variabilités optimales et réalisées de l'inflation et de la production par sous-période

$\lambda$	1966T1-1979T3		1982T4-2007T2	
	$\text{var}(x)$	$\text{var}(\pi)$	$\text{var}(x)$	$\text{var}(\pi)$
<b>1. Variabilités optimales</b>				
0.05	20.47	1.29	9.69	0.78
0.10	13.00	1.85	6.15	1.00
0.15	10.00	2.26	4.66	1.20
0.20	8.23	2.62	3.79	1.37
0.25	7.02	2.96	3.20	1.53
0.30	6.11	3.29	2.76	1.69
0.35	5.39	3.62	2.43	1.84
0.40	4.79	3.95	2.16	1.99
0.45	4.21	4.35	1.93	2.15
0.50	3.84	4.69	1.74	2.32
0.55	3.45	5.10	1.50	2.54
0.60	3.08	5.57	1.38	2.78
0.65	2.75	6.10	1.25	3.02
0.70	2.38	6.75	1.10	3.33
0.75	2.13	7.50	0.96	3.69
0.80	1.79	8.48	0.82	4.17
0.85	1.52	9.91	0.68	4.82
0.90	1.19	12.18	0.54	5.88
0.95	0.80	16.93	0.36	8.19
<b>2. Variabilités observées</b>				
Obs	5.73	12.94	2.62	2.34

## APPENDICE D

### FIGURES



Figure D.1: Fonctions de réponse relatives aux différents chocs (1966T1-1979T3)

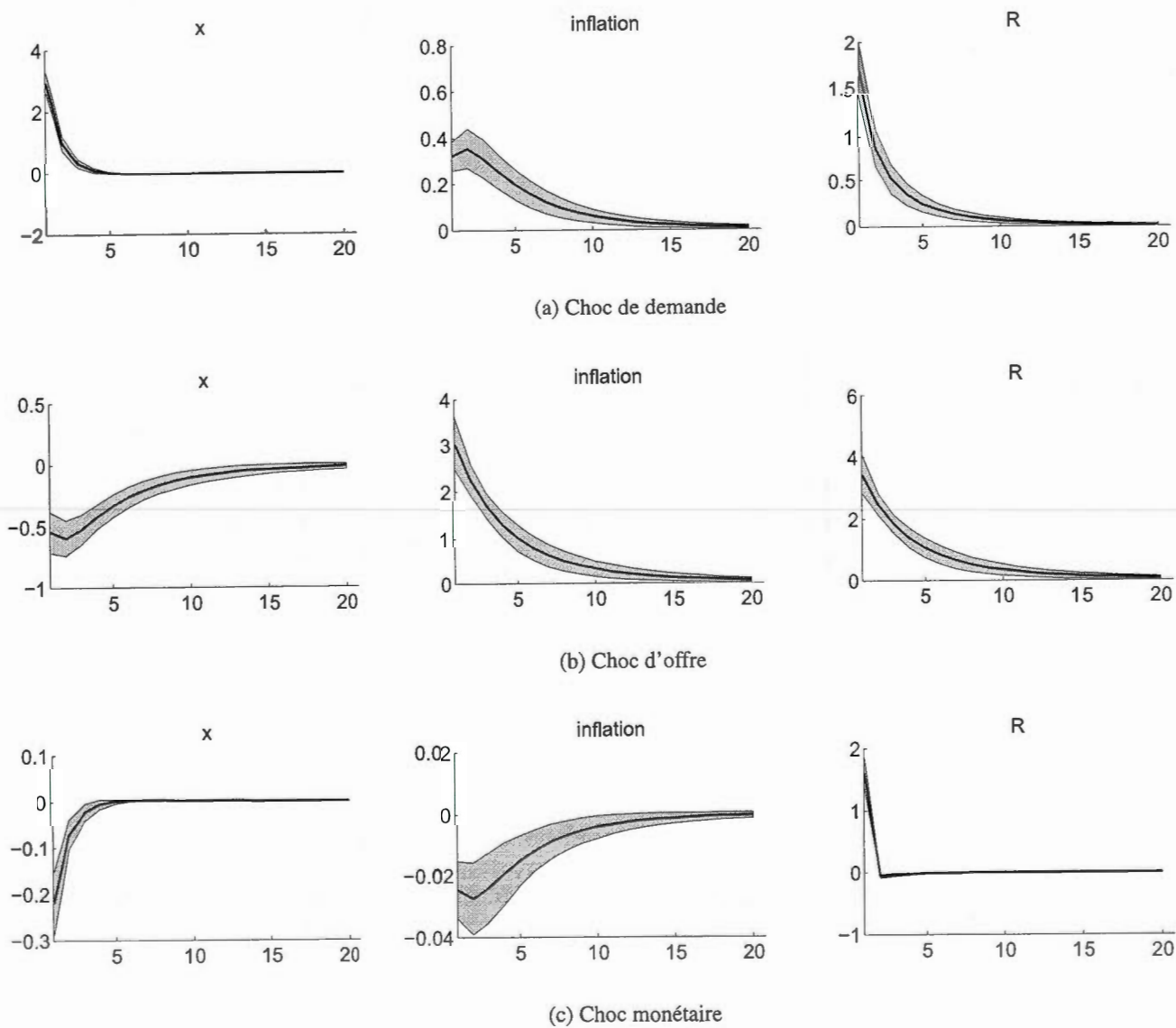
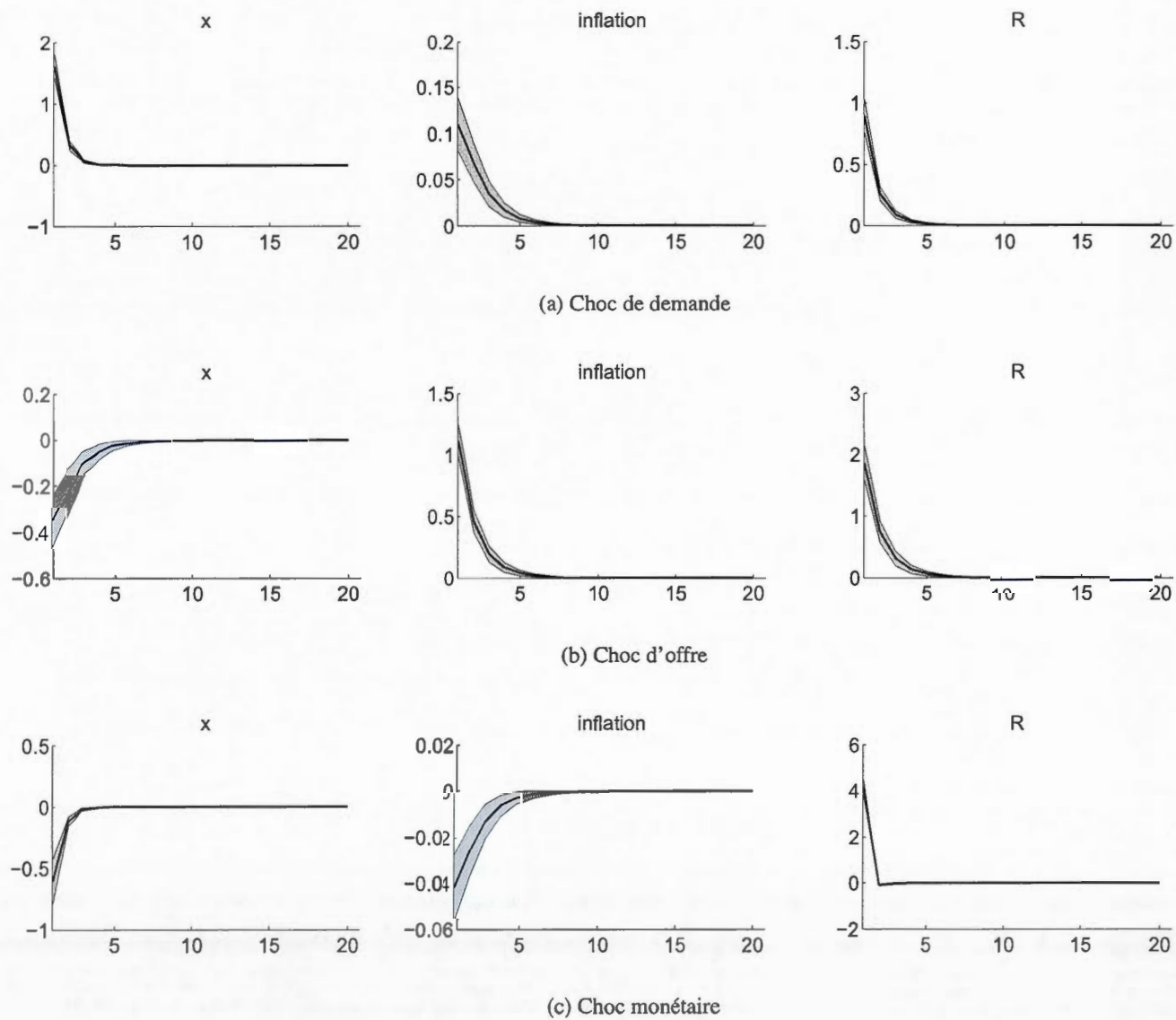


Figure D.2: Fonctions de réponse relatives aux différents chocs (1982T4-2007T2)



## CONCLUSION

Cette thèse est composée de trois articles portant sur l'estimation des modèles DSGE. Le premier analyse les propriétés statistiques des fonctions de réponses dans les vecteurs autorégressifs structurels avec une variable hautement persistante (e.g., les heures travaillées). Le deuxième développe un test pour comparer deux modèles DSGE. Quant au troisième, il porte sur l'évaluation de l'impact de la politique monétaire sur la grande modération.

Dans le premier article on étudie l'impact des propriétés statistiques des fonctions de réponses dans les SVARs avec une variable persistante comme les heures travaillées et des restrictions de long terme. Nos résultats montrent que les fonctions de réponses estimées à partir des modèles LSVAR et DSVAR sont biaisées en échantillons finis si la mesure de productivité est contaminée par des mouvements de basses fréquences dans les heures. En revanche ce biais disparaît lorsque l'économètre utilise une bonne mesure de la TFP. De plus nous montrons que les estimateurs du LSVAR sont asymptotiquement convergents, mais présentent une distribution limite standard, ce qui explique le grand intervalle de confiance pour la réponse dynamique. Ainsi nos conclusions peuvent servir de guide pour améliorer la précision des modèles SVAR avec des restrictions de long terme. Premièrement, il est important de mettre davantage d'efforts pour obtenir une bonne mesure de la TFP comme cela a été fait par Basu, Fernald et Kimball (2006) à la fréquence annuelle, puisque l'inclusion de variable hautement persistante est moins problématique dans ce cas. Deuxièmement, nos résultats montrent qu'une partie des mauvais résultats des SVARs est due à la persistance élevée des heures. En effet lorsque l'on utilise une meilleure mesure des heures travaillées (e.g., Francis et Ramey (2009)), ou la méthode à deux étapes de Fève et Guay (2010) pour obtenir un estimateur du choc technologique. Dans ces cas on obtient le même résultat que l'on utilise les heures en niveau ou en première différence dans le SVAR, i.e., un déclin à court terme des heures suivi d'une réponse en forme de cloche.

Dans le deuxième article on développe un test pour comparer les modèles d'équilibre général stochastique. Notre test est relié de près à celui développé par Hnatkovska, Marmer et Tang (2012). Cependant le test développé permet d'étendre leur modèle en relâchant certaines hypothèses. Premièrement on utilise la méthode d'inférence indirecte, ce qui nous permet de relâcher l'hypothèse faite par Hnatkovska, Marmer et Tang (2012) sur la convergence de leurs estimateurs. En effet, dans notre cas de par la condition d'englobement, la convergence de nos estimateurs est assurée. Deuxièmement lors de notre estimation, on peut utiliser des vecteurs de paramètres instrumentaux différents pour chacun des modèles, ce qui n'était pas le cas pour le test de Hnatkovska, Marmer et Tang (2012). Le principal résultat que l'on obtient est que la distribution asymptotique du test est normale, que les modèles soient imbriqués ou pas. Enfin pour mettre en pratique notre test, on l'applique pour comparer le modèle de Burnside et Eichenbaum (1996) et le modèle de Ambler, Guay et Phaneuf (2012), afin de comparer leur capacité à reproduire la dynamique des cycles réels États-Unis. On conclut que le modèle de Ambler, Guay et Phaneuf (2012) prend mieux en compte cette dynamique de par l'introduction des rigidités salariales et les coûts d'ajustement du travail.

Dans le troisième article on utilise la courbe de Taylor (souvent considérée comme un barème pour évaluer l'optimalité de la politique de la banque centrale) dans le but d'analyser l'impact de la politique monétaire sur la stabilisation économique. Pour cela on utilise l'estimation Bayésienne pour estimer une version linéarisée du modèle DSGE standard utilisé par Castelnovo (2006). Afin d'évaluer le changement dans la performance macroéconomique qui est due au changement dans la variabilité des chocs et celle qui est due au changement dans l'efficacité de la politique on s'appuie sur la méthodologie développée par Cecchetti, Flores-Lagunes et Krause (2006). Pour cela on construit trois mesures, une pour la performance macroéconomique, une pour les changements dans l'efficacité de la politique et une pour les changements dans la variabilité des chocs d'offre. Le point clef de notre étude est le fait que l'on utilise la méthodologie bootstrap afin de prendre en compte l'incertitude entourant la courbe de Taylor, ainsi que celle des points de performances. Les principaux résultats de notre études sont les suivants. Premièrement, on observe que les niveaux de performances de la politique monétaire se sont déplacés vers la courbe d'efficacité qui se sont elles-mêmes déplacées vers l'origine. Ceci nous

permet de conclure que lorsque la performance de la politique monétaire se déplace vers l'origine, on observe une amélioration de l'efficacité de la politique monétaire, ce qui se traduit par une diminution des pertes sociales. Deuxièmement, nos résultats montrent que la performance macroéconomique s'est améliorée, et que cette amélioration est due en grande partie (environ 62%) à l'amélioration de l'efficacité de la politique monétaire.



## BIBLIOGRAPHIE

- Adjemian, S., H. Bastani, F. Karamé, M. Juillard, J. Maih, F. Mihoubi, G. Perendia, M. Ratto et S. Villemot. 2013. Dynare : Reference manual version 4. Dynare Working Papers no. 1, CEPREMAP.
- Ambler, S., A. Guay et L. Phaneuf. 2012. « Endogenous business cycle propagation and the persistence problem : The role of labor-market frictions ». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 36, no. 1, p. 47 – 62. <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016518891100159X>>.
- Andrews, D. W. K. 1999. « Consistent moment selection procedures for generalized method of moments estimation ». *Econometrica*, vol. 67, no. 3, p. 543–564. <<http://ideas.repec.org/a/econ/emetrp/v67y1999i3p543-564.html>>.
- Basu, S., J. G. Fernald et M. S. Kimball. 2006. « Are technology improvements contractionary ? ». *American Economic Review*, vol. 96, no. 5, p. 1418–1448. <<http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v96y2006i5p1418-1448.html>>.
- Beaudry, P., et A. Guay. 1996. « What do interest rates reveal about the functioning of real business cycle models ? ». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 20, no. 9-10, p. 1661–1682. <<http://ideas.repec.org/a/eee/dyncon/v20y1996i9-10p1661-1682.html>>.
- Benati, L., et P. Surico. 2008. Var analysis and the great moderation. Working Paper Series no. 866, European Central Bank.
- Blanchard, O. J., et C. M. Kahn. 1980. « The solution of linear difference models under rational expectations ». *Econometrica*, vol. 48, no. 5, p. 1305–11. <<http://ideas.repec.org/a/econ/emetrp/v48y1980i5p1305-11.html>>.

- Blanchard, O. J., et D. Quah. 1989. « The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances ». *American Economic Review*, vol. 79, no. 4, p. 655–73. <<http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v79y1989i4p655-73.html>>.
- Boivin, J., et M. P. Giannoni. 2006. « Has monetary policy become more effective ? ». *The Review of Economics and Statistics*, vol. 88, no. 3, p. 445–462. <<http://ideas.repec.org/a/tpr/restat/v88y2006i3p445-462.html>>.
- Burnside, C., et M. Eichenbaum. 1996. « Factor-hoarding and the propagation of business-cycle shocks ». *American Economic Review*, vol. 86, no. 5, p. 1154–74. <<http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v86y1996i5p1154-74.html>>.
- Burnside, C., M. Eichenbaum et S. Rebelo. 1993. « Labor hoarding and the business cycle ». *Journal of Political Economy*, vol. 101, no. 2, p. 245–73. <<http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v101y1993i2p245-73.html>>.
- Castelnuovo, E. 2006. Monetary policy switch, the Taylor curve, and the great moderation. *Computing in Economics and Finance* 2006 no. 59, Society for Computational Economics.
- Cecchetti, S. G., et M. Ehrmann. 2002. *Does Inflation Targeting Increase Output Volatility ? : An International Comparison of Policymakers' Preferences and Outcomes*. Coll. Loayza, N., K. Schmidt-Hebbel, N. L. S. Editor) et K. S.-H. (Series, éditeurs, Coll. « *Monetary Policy : Rules and Transmission Mechanisms* ». T. 4, série *Central Banking, Analysis, and Economic Policies Book Series*, chapitre 9, p. 247–274. Central Bank of Chile.
- Cecchetti, S. G., A. Flores-Lagunes et S. Krause. 2006. « Has monetary policy become more efficient ? a cross-country analysis ». *Economic Journal*, vol. 116, no. 511, p. 408–433. <<http://ideas.repec.org/a/ecj/econjl/v116y2006i511p408-433.html>>.
- Chan, N. H., et C. Z. Wei. 1987. « Asymptotic Inference for nearly nonstationary AR(1) processes ». *The Annals of Statistics*, vol. 15, no. 3, p. pp. 1050–1063. <<http://www.jstor.org/stable/2241815>>.

- Chang, Y., T. Doh et F. Schorfheide. 2007. « Non-stationary hours in a DSGE model ». *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 39, no. 6, p. pp. 1357–1373. <<http://www.jstor.org/stable/4494301>>.
- Chari, V., P. J. Kehoe et E. R. McGrattan. 2008. « Are structural vars with long-run restrictions useful in developing business cycle theory ? ». *Journal of Monetary Economics*, vol. 55, no. 8, p. 1337 – 1352. <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304393208001505>>.
- Christiano, L. J., M. Boldrin et J. D. M. Fisher. 2001. « Habit persistence, asset returns, and the business cycle ». *American Economic Review*, vol. 91, no. 1, p. 149–166. <<http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v91y2001i1p149-166.html>>.
- Christiano, L. J., M. Eichenbaum et C. L. Evans. 2005. « Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy ». *Journal of Political Economy*, vol. 113, no. 1, p. 1–45. <<http://ideas.repec.org/a/ucp/jpolec/v113y2005i1p1-45.html>>.
- Christiano, L. J., M. Eichenbaum et R. Vigfusson. 2003. What happens after a technology shock ? NBER Working Papers no. 9819, National Bureau of Economic Research, Inc.
- . 2004. « The response of hours to a technology shock : Evidence based on direct measures of technology ». *Journal of the European Economic Association*, vol. 2, no. 2-3, p. 381–395. <<http://ideas.repec.org/a/tpr/jeurec/v2y2004i2-3p381-395.html>>.
- . 2006. Assessing structural vars. NBER Working Papers no. 12353, National Bureau of Economic Research, Inc.
- Clarida, R., J. Galí et M. Gertler. 2000. « Monetary policy rules and macroeconomic stability : Evidence and some theory ». *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 115, no. 1, p. 147–180. <<http://ideas.repec.org/a/tpr/qjecon/v115y2000i1p147-180.html>>.
- Côté, D., J. Kuszczak, J.-P. Lam, Y. Liu et P. St-Amant. 2002. The performance and robustness

- of simple monetary policy rules in models of the canadian economy. Technical Reports no. 92, Bank of Canada.
- Dennis, R. 2001. The policy preferences of the U.S. Federal Reserve. Working Papers in Applied Economic Theory no. 2001-08, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Dennis, R. 2004a. « Solving for optimal simple rules in rational expectations models ». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 28, no. 8, p. 1635–1660. <<http://ideas.repec.org/a/eee/dyncon/v28y2004i8p1635-1660.html>>.
- Dennis, R. 2004b. Specifying and estimating new Keynesian models with instrument rules and optimal monetary policies. Working Papers in Applied Economic Theory no. 2004-17, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Dennis, R. 2007. « Optimal policy in rational expectations models : New solution algorithms ». *Macroeconomic Dynamics*, vol. 11, no. 01, p. 31–55. <[http://ideas.repec.org/a/cup/macdyn/v11y2007i01p31-55\\_05.html](http://ideas.repec.org/a/cup/macdyn/v11y2007i01p31-55_05.html)>.
- Dridi, R., A. Guay et E. Renault. 2007. « Indirect inference and calibration of dynamic stochastic general equilibrium models ». *Journal of Econometrics*, p. 397–430.
- Erceg, C. J., L. Guerrieri et C. Gust. 2005. « Can long-run restrictions identify technology shocks ? ». *Journal of the European Economic Association*, vol. 3, no. 6, p. 1237–1278. <<http://ideas.repec.org/a/tpri/jeurec/v3y2005i6p1237-1278.html>>.
- Fernald, J. 2012. A quarterly, utilization-adjusted series on total factor productivity. Working Paper Series no. 2012-19, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Francis, N., et V. A. Ramey. 2005. « Is the technology-driven real business cycle hypothesis dead? shocks and aggregate fluctuations revisited ». *Journal of Monetary Economics*, vol. 52, no. 8, p. 1379–1399. <<http://ideas.repec.org/a/eee/moneco/v52y2005i8p1379-1399.html>>.

- Francis, N., et V. A. Ramey. 2009. « Measures of per capita hours and their implications for the technology-hours debate ». *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 41, no. 6, p. 1071–1097. <<http://ideas.repec.org/a/mcb/jmoncb/v41y2009i6p1071-1097.html>>.
- Fuhrer, J. C., et G. D. Rudebusch. 2004. « Estimating the euler equation for output ». *Journal of Monetary Economics*, vol. 51, no. 6, p. 1133–1153. <<http://ideas.repec.org/a/eee/moneco/v51y2004i6p1133-1153.html>>.
- Fève, P., et A. Guay. 2009. « The response of hours to a technology shock : A two-step structural var approach ». *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 41, no. 5, p. 987–1013. <<http://ideas.repec.org/a/mcb/jmoncb/v41y2009i5p987-1013.html>>.
- . 2010. « Identification of technology shocks in structural vars ». *Economic Journal*, vol. 120, no. 549, p. 1284–1318. <<http://ideas.repec.org/a/ecj/econjl/v120y2010i549p1284-1318.html>>.
- Galí, J. 2008. *Introduction to Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle : An Introduction to the New Keynesian Framework*. Coll. « Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle : An Introduction to the New Keynesian Framework ». Coll. « Introductory Chapters ». Princeton University Press.
- Galí, J., et M. Gertler. 1999. « Inflation dynamics : A structural econometric analysis ». *Journal of Monetary Economics*, vol. 44, no. 2, p. 195–222. <<http://ideas.repec.org/a/eee/moneco/v44y1999i2p195-222.html>>.
- Galí, J., et P. Rabanal. 2004. Technology shocks and aggregate fluctuations : how well does the RBS model fit postwar U.S. data ? NBER Working Papers no. 10636, National Bureau of Economic Research, Inc.
- Galí, J., M. Gertler et J. D. Lopez-Salido. 2001. « European inflation dynamics ». *European Economic Review*, vol. 45, no. 7, p. 1237–1270. <<http://ideas.repec.org/a/eee/eecrev/v45y2001i7p1237-1270.html>>.



- Gertler, M., J. Galí et R. Clarida. 1999. « The science of monetary policy : a new Keynesian perspective ». *Journal of Economic Literature*, vol. 37, no. 4, p. 1661–1707. <<http://ideas.repec.org/a/aea/jecclit/v37y1999i4p1661-1707.html>>.
- Gospodinov, N. 2010. « Inference in nearly nonstationary svar models with long-run identifying restrictions ». *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 28, no. 1, p. 1–12. <<http://ideas.repec.org/a/bes/jnlbes/v28i1y2010p1-12.html>>.
- Gospodinov, N., A. Maynard et E. Pesavento. 2011. « Sensitivity of impulse responses to small low-frequency comovements : Reconciling the evidence on the effects of technology shocks ». *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 29, no. 4, p. 455–467. <<http://ideas.repec.org/a/bes/jnlbes/v29i4y2011p455-467.html>>.
- Gouriéroux, C., et A. Monfort. 1995. « Testing, encompassing, and simulating dynamic econometric models ». *Econometric Theory*, vol. 11, no. 02, p. 195–228. <[http://ideas.repec.org/a/cup/etheor/v11y1995i02p195-228\\_00.html](http://ideas.repec.org/a/cup/etheor/v11y1995i02p195-228_00.html)>.
- . 1997. *Simulation-based Econometric Methods*. Coll. « OUP Catalogue », no 9780198774754. Oxford University Press. <<http://ideas.repec.org/b/oxp/obooks/9780198774754.html>>.
- Gouriéroux, C., A. Monfort et E. Renault. 1993. « Indirect inference ». *Journal of Applied Econometrics*, vol. 8, no. S1, p. S85–S118. <<http://dx.doi.org/10.1002/jae.3950080507>>.
- Guay, A. 2009. Encompassing with misspecified models. Rapport, Université du Québec à Montréal, CIRPEE and CIREQ.
- Hamilton, J. 1994. *Time series analysis*. Princeton, NJ : Princeton Univ. Press.
- Hansen, G. D. 1985. « Indivisible labor and the business cycle ». *Journal of Monetary Economics*, vol. 16, no. 3, p. 309–327. <<http://ideas.repec.org/a/eee/moneco/v16y1985i3p309-327.html>>.

- Hansen, L. P. 1982. « Large sample properties of generalized method of moments estimators ». *Econometrica*, vol. 50, no. 4, p. 1029–54.
- Hnatkovska, V., V. Marmer et Y. Tang. 2012. « Comparison of misspecified calibrated models : The minimum distance approach ». *Journal of Econometrics*, vol. 169, no. 1, p. 131–138. <<http://ideas.repec.org/a/eee/econom/v169y2012i1p131-138.html>>.
- Juillard, M., et T. Oaktan. 2007. Méthodes de simulation des modèles stochastiques d'équilibre général. Working Papers no. 1, CEPREMAP.
- Kim, C.-J., et C. R. Nelson. 1999. « Has the U.S. economy become more stable ? A bayesian approach based on a markov-switching model of the business cycle ». *The Review of Economics and Statistics*, vol. 81, no. 4, p. 608–616. <<http://ideas.repec.org/a/tpr/restat/v81y1999i4p608-616.html>>.
- Kim, K., et A. Pagan. 1995. *The Econometric Analysis of Calibrated Macroeconomic Models*. Coll. Pagan, M., et M. Wickens, éditeurs, Coll. « *Handbook of Applied Econometrics* », chapitre 7, p. 356–390. Blackwell Publishing.
- Kurmann, A. 2005. « Quantifying the uncertainty about the fit of a new Keynesian pricing model ». *Journal of Monetary Economics*, vol. 52, no. 6, p. 1119–1134. <<http://ideas.repec.org/a/eee/moneco/v52y2005i6p1119-1134.html>>.
- Lewis, R., et G. C. Reinsel. 1985. « Prediction of multivariate time series by autoregressive model fitting ». *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 16, no. 3, p. 393–411. <<http://ideas.repec.org/a/eee/jmvana/v16y1985i3p393-411.html>>.
- Marcet, A. 2006. Overdifferencing var's is ok. manuscript.
- McConnell, M., et G. P. Quiros. 2000. « Output fluctuations in the united states : what has changed since the early 1980s ? ». *Proceedings*. no. Mar. <<http://ideas.repec.org/a/fip/fedfpr/y2000imarx1.html>>.

- Mizon, G. E., et J.-F. Richard. 1986. « The encompassing principle and its application to testing non-nested hypotheses ». *Econometrica*, vol. 54, no. 3, p. 657-78. <<http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v54y1986i3p657-78.html>>.
- Ng, S., et P. Perron. 2001. « Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power ». *Econometrica*, vol. 69, no. 6, p. 1519-1554. <<http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v69y2001i6p1519-1554.html>>.
- Pantula, S. G. 1991. « Asymptotic distributions of unit-root tests when the process is nearly stationary ». *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 9, no. 1, p. 63-71. <<http://ideas.repec.org/a/bes/jnlbes/v9y1991i1p63-71.html>>.
- Perron, P., et S. Ng. 1996. « Useful modifications to some unit root tests with dependent errors and their local asymptotic properties ». *Review of Economic Studies*, vol. 63, no. 3, p. 435-63. <<http://ideas.repec.org/a/bla/restud/v63y1996i3p435-63.html>>.
- Phillips, P. C. B. 1987. « Towards a unified asymptotic theory for autoregression ». *Biometrika*, vol. 74, no. 3, p. 535-547. <<http://biomet.oxfordjournals.org/content/74/3/535.abstract>>.
- Rabanal, P. 2007. « Does inflation increase after a monetary policy tightening? answers based on an estimated dsge model ». *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 31, no. 3, p. 906-937. <<http://ideas.repec.org/a/eee/dyncon/v31y2007i3p906-937.html>>.
- Ragan, C. 2007. L'importance de la politique monétaire : une perspective canadienne. Working Papers no. Hiver 2006-2007, Revue de la Banque du Canada.
- Rivers, D., et Q. Vuong. 2002. « Model selection tests for nonlinear dynamic models ». *Econometrics Journal*, vol. 5, no. 1, p. 1-39. <<http://ideas.repec.org/a/ect/emjrn1/v5y2002i1p1-39.html>>.
- Rudebusch, G., et L. E. Svensson. 1999. *Policy Rules for Inflation Targeting*. Coll. « Monetary Policy Rules ». Coll. « NBER Chapters », p. 203-262. National Bureau of Economic Research, Inc.

- Schorfheide, F. 2008. « DSGE model-based estimation of the new Keynesian Phillips curve ». *Economic Quarterly*. no. Fall, p. 397–433. <<http://ideas.repec.org/a/fip/fedreq/y2008ifallp397-433nv.94no.4.html>>.
- Shapiro, M., et M. Watson. 1988. *Sources of Business Cycles Fluctuations*. Coll. « NBER Macroeconomics Annual 1988, Volume 3 ». Coll. « NBER Chapters », p. 111–156. National Bureau of Economic Research, Inc.
- Smets, F., et R. Wouters. 2003. « An estimated dynamic stochastic general equilibrium model of the euro area ». *Journal of the European Economic Association*, vol. 1, no. 5, p. 1123–1175. <<http://ideas.repec.org/a/tpj/jeurec/v1y2003i5p1123-1175.html>>.
- Smets, F., et R. Wouters. 2007. « Shocks and frictions in us business cycles : A bayesian dsge approach ». *American Economic Review*, vol. 97, no. 3, p. 586–606. <<http://ideas.repec.org/a/aea/aecrev/v97y2007i3p586-606.html>>.
- Srour, G. 2003. Some notes on monetary policy rules with uncertainty. Working Papers no. 03-16, Bank of Canada.
- Stock, J. H., et M. W. Watson. 2003a. *Has the Business Cycle Changed and Why ?* Coll. « NBER Macroeconomics Annual 2002, Volume 17 ». Coll. « NBER Chapters », p. 159–230. National Bureau of Economic Research, Inc.
- . 2003b. *Has the Business Cycle Changed and Why ?* Coll. « NBER Macroeconomics Annual 2002, Volume 17 ». Coll. « NBER Chapters », p. 159–230. National Bureau of Economic Research, Inc.
- Taylor, J. B. 1994. « The inflation/output variability trade-off revisited ». *Conference Series ; [Proceedings]*, p. 21–24. <<http://ideas.repec.org/a/fip/fedbc/y1994p21-24n38.html>>.
- . 1999. *A Historical Analysis of Monetary Policy Rules*. Coll. « Monetary Policy Rules ». Coll. « NBER Chapters », p. 319–348. National Bureau of Economic Research, Inc.

Vigfusson, R. J. 2004. The delayed response to a technology shock : a flexible price explanation. International Finance Discussion Papers no. 810, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.).

Vuong, Q. H. 1989. « Likelihood ratio tests for model selection and non-nested hypotheses ». *Econometrica*, vol. 57, no. 2, p. 307-33. <<http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v57y1989i2p307-33.html>>.

Walsh, C. E. 1998. « The new output-inflation trade-off ». *FRBSF Economic Letter*. no. Feb 6. <<http://ideas.repec.org/a/fip/fedfel/y1998ifeb6n98-4.html>>.

Woodford, M. 2002. « Inflation stabilization and welfare ». *The B.E. Journal of Macroeconomics*, vol. 2, no. 1, p. 1-53. <<http://ideas.repec.org/a/bpj/bejmac/vcontributions.2y2002i1n1.html>>.